Tietokoneharjoitus 1

P1, syksy 2011

Tehtävä 3

> $\text{phi} := \frac{(1+\text{sqrt}(5))}{2}$

$$\phi := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \tag{1.1}$$

> $f := n \rightarrow \frac{(\phi^n - (-\text{phi})^{-n})}{\text{sqrt}(5)}$

$$f := n \rightarrow \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} \tag{1.2}$$

> $f(0)$

$$0 \tag{1.3}$$

> $f(1)$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}\right)\sqrt{5} \tag{1.4}$$

> $simplify(\%)$

$$1 \tag{1.5}$$

> $seq(simplify(f(n)), n = 0..10)$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \tag{1.6}$$

> $f(n+2) - f(n) - f(n+1)$

$$\frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+2} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{-n-2}\right)\sqrt{5} - \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{-n}\right)\sqrt{5} - \frac{1}{5}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{-n-1}\right)\sqrt{5} \tag{1.7}$$

> $expand(\%)$

$$-\frac{1}{5}\frac{\sqrt{5}}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{2}} + \frac{1}{5}\frac{\sqrt{5}}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n}} + \frac{1}{5}\frac{\sqrt{5}}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^{n}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)} \tag{1.8}$$

> $simplify(\%)$

$$0 \tag{1.9}$$

Toimii myös vastakkaisessa järjestyksessä, mutta kumpikaan ei yksinään sievennä loppuun.

Tehtävä 2

> $'sum\left(\frac{1}{n^2}, n=1..infinity\right)' = sum\left(\frac{1}{n^2}, n=1..infinity\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2 \qquad (2.1)$$

> $sum\left(\frac{1}{n}, n=1..infinity\right)$

$$\infty \qquad (2.2)$$

Muut samoin.

> $evalf\left(sum\left(\frac{1}{n}, n=1..10^{44}\right)\right)$

$$101.8909598 \qquad (2.3)$$

Ei tarvitse tutkia tämän tarkemmin, suuruusluokka riittää.

Tehtävä 4

> $a := n \rightarrow \frac{2 \cdot \mathrm{sqrt}(2)}{9801} \cdot \frac{(1103 + 26390 \cdot n) \cdot (4 \cdot n)!}{396^{4 \cdot n} \cdot (n!)^4}$

$$a := n \rightarrow \frac{2}{9801} \frac{\sqrt{2}\,(1103 + 26390\,n)\,(4\,n)!}{396^{4\,n}\,n!^4} \qquad (3.1)$$

> $evalf\left(\frac{1}{\mathrm{Pi}} - sum(a(n), n=0..5), 55\right)$

$$4.803650\ 10^{-49} \qquad (3.2)$$

> $evalf\left(\mathrm{Pi} - sum(a(n), n=0..6)^{-1}, 55\right)$

$$0. \qquad (3.3)$$

Riittää siis laskea arvoon n=6 saakka. Laskennassa 55 desimaalia varmuuden vuoksi (pyöristysvirheet).

> $q := limit\left(\frac{a(n+1)}{a(n)}, n=infinity\right)$

$$q := \frac{1}{96059601} \qquad (3.4)$$