-e

Differentiaaliyhtälöt

1. mplD001.tex (infoverkostot (iv) s. 2001) Ratkaise yhtälö

$$\frac{dy}{dt} = ty$$

.

a.) Muodosta yleinen ratkaisu.

b.) Määritä vakio `_C1` alkuehdolle $y(0) = 1$.

c.) Ratkaise alkuarvotehtävä suoraan `dsolve`:lla.

Vihje: Maplen funktio `dsolve`.
b)-kohdassa voit ottaa ratkaisulausekkeen `rhs` (Righthand side) kiinni. Tarvitset lisäksi komentoja `subs` ja `solve`
c) `?dsolve`, [HAM] ss. 162-165

Ratkaisu:

```
 > dyht := diff(y(t), t) = t*y(t)
 a)
 > ylratk := dsolve(dyht, y(t))
 b)
 > Y := rhs(ylratk)
 > solve(subs(t = 0, Y) = 1, _C1)
 Huom! Dokumenttimoodissa alaviiva pudottaa kursorin alaindeksitasolle.
 "copy/paste" tarvitaan _C1:lle.
 > eval(%)
c)
 > dsolve({dyht, y(0) = 1}, y(t))
```

2. mplD002.tex (infoverkostot (iv) s. 2001)

Ratkaise differentiaaliyhtälö sijoittamalla ratkaisuehdotus (REh) annettuun yhtälöön tai esim. integroimalla, arvaamalla tms.:

(a) $y' + y = x^2 - 2$, REh: $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x$ (b) $y'' + y = 0$, REh: $y = a\cos x + b\sin x$ (c) $y''' = e^x$, (d) $x + yy' = 0$, REh: $x^2 + y^2 = C$ ($C > 0$, vakio).

Vihje: (d)-kohta: Derivoi implisiittisesti, ts. oleta, että on olemassa derivoituva funktio $x \mapsto y(x)$ s.e. $x^2 + y(x) = C$ ja derivoi puolittain. (Tässä tapauksessa olemassaolo tiedetään, onhan $y(x) = \sqrt{C - x^2}$ tällainen. Tämän eksplisiittisen lausekkeen käyttö ei silti kannata, se vain mutkistaa asioita, olkaamme siis implisiittisiä.)

Ratkaisu: mplD002R.mw ja .pdf ON

3. mplD003.tex [Matlab-versio: ...mlD002.tex] (iv3/2001, harj. 1, teht. 2)
Millä xy-tason käyrillä on ominaisuus: Käyrän tangentin kulmakerroin jokaisessa pisteessä (x, y) on $-\frac{4x}{y}$?

Ratkaise yhtälö muuttujien erottelulla ("separation of variables"). Piirrä suuntakenttä isokliineja apuna käyttäen käsin vaikkapa alueessa $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

Ota sitten Maple avuksi. Kokeile ja selitä!

Vihje: Kts. [HAM] ss. 169-170

```
> with(DEtools)
> with(plots)
```

Suuntakenttään:*DEplot*,
grafiikkojen yhdistämiseen: *display*.
Suoraparven saat tyyliin

```
> yparvi:=seq(...,c=[-2,-1,-.5,.5,2,1]) # tms.
> isokl:=plot([yparvi],x=...)
```

Yleisemmin isokliinit saadaan piirretyksi *implicitplot*-funktiolla, mutta tässä saatiin ratkaistussa muodossa suoraan.

Avainsanat: MapleDy, diffyhtälöt, suuntakenttä, isokliinit, mplDifferentiaali(yhtälöt)

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

4. mplD004.tex [Matlab-versio: ...mlD004.tex] (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 1-2)

Laskuvarjohyppääjän yhtälö. Oletetaan, että hyppääjän + varustuksen massa = m ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön, olkoon verrannollisuuskerroin = b. Tällöin Newtonin 2. laki antaa liikeyhtälön:

$$mv' = mg - bv^2.$$

Olkoon yksinkertaisuuden vuoksi $m = 1, b = 1$ ja $g = 9.81m/s^2$.

Piirrä suuntakenttä.

Oletetaan, että laskuvarjo aukeaa, kun $v = 10m/s$, valitaan tämä alkuhetkeksi $t = 0$. Piirrä tämä ratkaisukäyrä suuntakenttäpiirrokseen. Yritä nähdä suuntakentästä, että kaikki ratkaisut näyttävät lähestyvän rajanopeutta $v \approx 3.13$ ja että ratkaisut ovat joko kasvavia tai pieneneviä (ja millä alkuarvoilla mitäkin, ja mitä tarkoittaa fysikaalisesti)

Määritä rajanopeus suoraan yhtälöstä.

Käytä Matlab-piirroksiin funktiota `dfield8` ja Maplessa DEtools-kirjaston DEplot-funktiota.

Vihje: Kts. [HAM] ss. 169-170 tai `?DEplot`

```
> with(DEtools)
> with(plots)
```

Suuntakenttään:*DEplot*,
grafiikkojen yhdistämiseen: *display*.
dfield-ohje:
Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta `http://math.rice.edu/~dfield/` ja sijoita se Matlab-polkusi varrelle.
Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`

Avainsanat: MatlabDy, MapleDy, diffyhtälöt, suuntakenttä, isokliinit, mplDifferentiaali(yhtälöt), mlDifferentiaali(yhtälöt)

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

5. mplD005.tex (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 2)

Muodosta edellä olevan laskuvarjotehtävän (mplD004) analyyttinen ratkaisu muuttujien erottelulla. Määritä edellä mainittu ($v(0) = 10$)-ratkaisukäyrä. Tarkista ratkaisu Maplella ja kokeile lopuksi Maplen `dsolve`- komentoa. (Ohje [HAM]-kirjassa.)

Vihje: Ohje analyyttiseen: Muistathan, että osamurtohajoitelma on hyödyllinen rationaalilausekkeen integroinnissa (Maple: `convert(lauseke,parfrac,muuttuja);` mutta osattava myös käsin).

Avainsanat: MapleDy, diffyhtälöt, muuttujien erottelu, mplDifferentiaali(yhtälöt), mlDifferentiaali(yhtälöt)

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998

6. mplD006.tex (iv3/2001, harj. 1, LV teht. 3)

Vaihdamme tässä LAODE-tyyliseen notaatioon: t on riippumaton muuttuja, x on “riippuva” muuttuja. Kannattaa totutella eri tyyleihin.

Ratkaise alkuarvotehtävä $x' = \frac{x}{2} - e^{-t}$, $x(0) = -1$. Kyseessä on *lineaarinen epähomogeeninen* (EHY). Tämä lasku ei edellytä mitään uutta muuttujien erottelun lisäksi (ainoastaan uskomista), kaikki on tässä neuvottu.

Suorita ratkaisu näin:

- Ratkaise ensin vastaava (HY) $x' = \frac{x}{2}$ (yleinen ratkaisu).
- Yritä keksiä jokin (EHY):n erityisratkaisu (siis mikä tahansa (EHY):n toteuttava). Keksiminen on helppoa, kun mietit exp-funktion derivointia. (Määräämätön kerroin ratkaistaan sijoittamalla yrite (EHY):yyn).

Lineaaristen teoria sanoo, että (EHY):n yleinen = (HY):n yleinen + (EHY):n erikoinen.

Piirrä myös suuntakenttä ja ratkaisukäyriä (Maple: DEtools[DEplot], Matlab: `dfield8 tai suuntak1`).
Miten näet suuntakentästä, että yhtälö ei ole autonominen?

Avainsanat: MapleDy, lineaariset diffyhtälöt, mplDifferentiaali(yhtälöt)

Viitteet: [LAODE] Golubitzky-Dellnitz: Linear Algebra and Differential Equations using Matlab, Brooks/Cole 1999.

7. mplD007.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 1)
Ratkaise (AA)-tehtävä $y' - 2xy = 1, \quad y(0) = -0.5$

Tässä näyttää siltä, että (EHY):n erikoinen olisi helppo löytää, mutta huomaat pian, että luonnolliset yritteet eivät toimi. (Kyseessähän on lineaarinen, mutta ei-vakiokertoiminen yhtälö.)

Ratkaise vaan sitten kiltisti integroivan tekijän menettelyllä.

Integrointi johtaa *erf*-funktioon, Maple antaa sen suoraan, voit myös konsultoida KRE-kirjaa hakusanalla *erf*. Lausu siis ratkaisu *erf*:n avulla.

Piirrä suuntakenttäpiirros Maplen `DEtools`-pakkauksen `DEplot`-funktion avulla (kts [HAM] s. 169), voit toki käyttää myös Matlab:n dfield8-funktiota (ohje alla).

Valitse alkuarvoja y_0 väliltä $(-1, -0.5)$ yrittäen löytää kriittistä arvoa y_0, joka jakaa ratrkaisukäyrät plus tai miinus ääretöntä lähestyviin. (Tuo kriittinen ratkaisukäyrä on rajoitettu.) Käytä hyväksesi *erf*-funktion ominaisuutta $\lim_{x\to\infty} erf(x) = 1$ laskeaksesi tarkan arvon y_0:lle.

Vihje: dfield-ohje: Hae m-tiedosto *dfield8* sivulta `http://math.rice.edu/~dfield/` ja sijoita se Matlab-polkusi varrelle.
Kirjoita Matlab-istuntoon : `dfield8`

Avainsanat: MapleDy, diffyhtälöt,erf, mplDifferentiaali(yhtälöt)

Viitteet: [KRE] E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
[HAM] Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

8. mplD008.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 2)
Tarkastellaan (AA)-tehtävää $xy' = 4y, \quad y(0) = 1$.

(a) Osoita, että tehtävällä ei ole ratkaisua. Osoita, että tämä ei ole ristiriidassa $\exists_1$-lauseen kanssa. (Huom: Lauseen avulla *ei voi todistaa epäeksistenssiä*, koska lauseen ehdot eivä ole välttämättömät.)

(b) Vaihdetaan alkuehdoksi: $y(0) = 0$. Miten nyt on ratkaisujen laita.

(c) Mitä voit sanoa alkuehdon $y(x_0) = y_0$ tapauksessa, jos $x_0 \neq 0$,
(A) suoraan ratkaisukaavan avulla, (B) $\exists_1$-lauseen avulla.

Vihje: Tämä on puhtaasti “perinteinen” tehtävä, mutta havainnollistus Maple/Matlab-välineillä on hyvinkin paikallaan.

Avainsanat: diffyhtälöt, ratkaisun (epä)olemassaolo, eksistenssilause, mplDifferentiaali(yhtälöt)

9. mplD009.tex (iv3/2001, harj. 2, AV teht. 3)
Muodosta *Picardin* iteraatiojonon muutama termi (AA)-tehtäville

(a) $y' = x + y, \quad y(0) = 0$ (b) $y' = x + y, \quad y(0) = -1$
(c) $y' = y^2, \quad y(0) = 1$.

Määritä myös tarkka ratkaisu.

Vihje: LV-tehtävässä palataan asiaan Maple-hommana. Tämä on tyypillistä symbolilaskennan vahvuusaluetta.

Avainsanat: diffyhtälöt, ratkaisun (epä)olemassaolo, Picard-Lindelöf-menetelmä, Picardin iteraatio, mplDifferentiaali(yhtälöt)

10. Ratkaise yhtälö $\frac{dy}{dt} = ty$.

Vihje: Maplen funktio `dsolve`.

11. mplD010.tex (iv3/2001, harj. 2, LV teht. 1)
Muodosta *Picardin* iteraatiojonoa pitemmälle kuin AV-tehtävässä samoille (AA)-tehtäville (a), (b), (c) ja lisäksi vielä (d): lle.

(a) $y' = x + y, \quad y(0) = 0$ (b) $y' = x + y, \quad y(0) = -1$
(c) $y' = y^2, \quad y(0) = 1.$ (d) $y' = 3\frac{y}{x}$

Laske myös tarkka ratkaisu Maplella ja piirrä se ja iteraatiojonon funktioita. (Jos tuntuu liian pitkältä, niin jätä yksi pois, hyvä olis saada kaikki yhteisesti katetuksi (vaikka parityöskentelyssä sopimalla).

Vihje: Malli: Aputiedostossa mplD010apu.zip on `L4Picard.mw`,`L4Picard.pdf`,`L4exa2.mw`, `L4exa2.pdf`, kts. myös [HAM] ss. 162–165 (`dsolve`)ja s. 126 *Picard–Lindelöf*

Avainsanat: diffyhtälöt, Picard-Lindelöf-menetelmä, Picardin iteraatio, mplDifferentiaali(yhtälöt)
Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

12. mplD011.tex

(a) Sovella *Picardin* iteraatiota (tuttuakin tutumpaan) (AA)-tehtävään

$y' = y, \quad y(0) = 1$. Osoita, että iteraatiojono lähestyy ratkaisufunktiota $y(x) = e^x$.

(b) (Olkoon vaihteeksi $x(t)$.)
Olkoon alkuarvotehtävänä edelleen $x' = x, \quad x(0) = 1$.

Osoita, että jos lasketaan likiarvo $x_n = x_h(t_n)$ EM:llä pisteessä $t = t_n$ käyttäen askelpituutta h, niin $x_h(t_n) = c(h)^{t_n}$, missä $c(h) = (1 + h)^{1/h}$.

Osoita tämän nojalla, että kiinteällä $t = t_n$ pätee $\lim_{h\to 0} x_h(t) = e^t$.

Vihje: Tehtävässä tuskin tarvitaan ohjelmistoja.
EM = *Eulerin menetelmä*

13. mplD012.tex
Seuraava toistokäsky soveltaa Eulerin menetelmää alkuarvotehtävän $y' = \sin(xy)$, $y(0) = 1$ ratkaisun likiarvon $y(1)$ laskemiseen. Kokeile käskyjä askelpituuksilla $h = 0.25, h = 0.1, h = 0.01$ ja $h = 10^{-4}$. Mikä menee pieleen viimeisessä kohdassa?

```
f:=(x,y)-> sin(x*y);
Digits:= 4;
n:= 4;
h:=1/n;
y[0] := 1;
for k from 0 to n-1 do      #  (paina tässä kohti Shift+Enter)
y[k+1]:= evalf(y[k]+h*f(k*h,y[k])) #    (samoin)
end do;
```

Piirrä Eulerin murtoviivat eri väreillä samaan koordinaatistoon.

Vihje: Datan piirto sujuu nykyisin "Matlab-tyylisesti":

```
> xlista:=[seq(j*h,j=0..n)];
> ylista:=[seq(y[j],j=0..n)]
> plot(xlista,ylista)
```

[HAM]-viitteessä ss. 94-96 esitetyt tavat pisteparien listana toimivat myös, mutta s. 96 zip-temppu ei ole enää tarpeen.

Viitteet: `[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

14. mplD013.tex
Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 3y' + 3y = 1 - e^{-x}, y(0) = 2, y'(0) = 0,$$

ja piirrä ratkaisun kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 10$.

Vihje: Diffyhtälön saat ratkaistua komennolla `dsolve`. Yhtälössä esiintyvät derivaatat voit ilmoittaa komennolla `diff`, ja derivaatan pisteessa 0 voit ilmaista derivaattaoperaattorilla `D(y)(0)`.

15. mplD014.tex Maple,Matlab

a) Ratkaise alkuarvotehtävä
$$y' - y = \cos x, \quad y(0) = 1$$
analyyttisesti Maplella ja numeerisesti Matlabilla. Piirrä ratkaisukäyrä.

b) Anna alkuarvoksi symboli c ja piirrä ratkaisukäyräparvi sopivalla välillä, kun $c = -0.9, -0.8, \ldots, 0$.

Miltä parvi näyttää suurilla x :n arvoilla. Tässä pitäisi erottua kolmenlaista käytöstä.

Vihje: Maple: dsolve, Matlab: ode45

Avainsanat: Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

Viitteet:
Coombes et al: Differential equations with Maple, Wiley
Boyce - DiPrima's: Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,Wiley

16. mplD015.tex Maple,Matlab
Tarkastellaan (AA)-tehtävää

$$y' = \frac{3t^2}{(3y^2 - 4)}, \quad y(1) = 0.$$

(a) Laske EM:llä ratkaisuapproksimaatiot pisteissä $t = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$ käyttäen askelta $h = 0.1$.

(b) Tee sama askeleella $h = 0.05$.

(c) Vertaa tuloksia.

(d) Piirrä suuntakenttä ja ratkaisuapproksimaatioita, sekä EM-ratkaisuja. Osaatko selittää, miksi EM toimii kohtuullisesti alussa, mutta kelvottomasti lopussa?

Vihje: Eulerin menetelmää voi tässä käyttää ohjelman (MMM) laskintyylillä, kuten edellä tai sitten oikeaksi funktioksi koodatulla versiolla, annetaan tässä nuo koodit.

Eulerin menetelmän koodit (sisältyvät myös apupakettiin *apu.zip):
Maple: [HAM s. 206] (copy/paste → Maple-istuntoon)

```
Euler:=proc(f,a,b,ya,m)
local n,h,t,y;
h:=evalf((b-a)/m);
t[0]:=a;y[0]:=ya;
for n from 0 to m do
  y[n+1]:=y[n]+h*f(t[n],y[n]);
  t[n+1]:=t[n]+h;
end do;
seq([t[n],y[n]],n=0..m);
end:
```

Esim: $y' = t - y^2$

```
f:=(t,y)->t-y^2;
e3:=Euler(f,0,5,1,3);
plot([e3]);
```

Matlab: (Kts. vastaava Matlab-teht.)

Avainsanat: Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

Viitteet:
`[KRE]` E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

17. mplD016.tex (vrt. Matlab: mlD007.tex)
Tarkastellaan (AA)-tehtävää

$$y' = \frac{2\sqrt{y - \ln t}}{t} + \frac{1}{t}, \quad y(1) = 0$$

välillä $t \in [1, 1.8]$ Ratkaise tehtävä

a) Eulerin menetelmällä askelpituudella $h = 0.1$,

b) Heunin menetelmällä askelpituudella $h = 0.2$,

c) RK4- menetelmällä askelpituudella $h = 0.4$.

Määritä tarkka ratkaisu Maple:n `dsolve`-komennolla ja laske sen avulla virheet, piirrä ja taulukoi kussakin tapauksessa.

Huomaa, että näillä askelpituuksien valinnoilla funktion arvojen laskentamäärät ovat samat.

Vihje: Eulerin menetelmän koodit (sisältyvät myös apupakettiin mplD016apu.zip):
Maple: [HAM s. 206] (copy/paste → Maple-istuntoon)

```
Euler:=proc(f,a,b,ya,m)
local n,h,t,y;
h:=evalf((b-a)/m);
t[0]:=a;y[0]:=ya;
for n from 0 to m do
  y[n+1]:=y[n]+h*f(t[n],y[n]);
  t[n+1]:=t[n]+h;
end do;
seq([t[n],y[n]],n=0..m);
end:
```

Esim: $y' = t - y^2$

```
f:=(t,y)->t-y^2;
e3:=Euler(f,0,5,1,3);
plot([e3]);
```

Laitetaan myös Heun ja RK4

Matlab: (Kts. vastaava Matlab-teht.)

Huom: Tästä voi kehitellä monenlaisia tehtävävariaatioita, myös ilman numeeristen menetelmien korostusta.

Avainsanat: Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

Viitteet:
`[KRE]` E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics, Wiley
`[HAM]` Heikki Apiola: Symbolista ja numeerista matematiikkaa Maple-ohjelmalla, Otatieto 588, 1998.

18. mplD017.tex, mlD007.tex

Huomasimme, että eksponentiaalinen kasvumalli, ns. *Malthus'n laki* $y' = ky$ ei toimi USA:n väestödataan pitkällä aikavälillä. Mallia voidaan tarkentaa lisäämällä sopiva kasvua rajoittava termi, tällöin johdutaan ns. logistiseen kasvulakiin:

$$y' = ay - by^2$$

USA:n väestödataan liityen *Verhulst* arvioi v. 1845 arvot $a = 0.03$ ja $b = 1.610^{-4}$, kun t mitataan vuosissa ja väkiluku $y(t)$ miljoonissa.

Opettajalle: Tehtävä voidaan käsitellä ehkä luontavamminkin kokonaan erillisenä numeeristen diffyhtälöratkaisujen opetuksesta. Tällöin otetaan vain alla olevat kohdat (c) ja/tai (d).

(a) Ratkaise tehtävä ($y(0) = 5.3$) Eulerin menetelmällä käyttämllä askelpituussa $h = 10$

(b) rk4:llä käyttäen n. nelinkertaista askelta (voit kokeilla pienempiäkin)

(c) Matlabin `ode45`:llä.

(d) Laske analyyttinen ratkaisu Maplella (kyseessähän on *Bernoullin yhtälö*.

Piirrä kuvia ja laske kaikissa tapauksessa ratkaisujen arvot annetuissa taulukkopisteissä. (ode45-tapauksessa onnistuu ainakin sovittamalla dataan splini funktiolla spline, joka on maailman helppokäyttöisin.)
kts. `http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/opas.html#splinit`
(Nykyään (2012) ei tarvita erillistä splinisovitusta, laskentapisteet voidaan antaa suoraan ode45-funktiolle syötteenä.)

Vihje:

```
function [T,Y]=eulerS(f,Tspan,ya,n)
% Tämä vain kehittely- ja opettelutarkoituksessa.
% Funktio eulerV hoitaa niin skalaari- kuin vektoriversion.
%  (24.2.04, modifioitu 21.8.2010)
% Esim: y'=t+y, y(0)=1
%       f=@(t,y)t+y
%       [T,Y]=eulerS(f,[0 4],1,6), plot(T,Y,T,Y,'.r');shg
a=Tspan(1);b=Tspan(2);
h=(b-a)/n;
Y=zeros(n+1,1);T=(a:h:b)'; %Pystyvektorit yhdenmukaisesti ode45:n
Y(1)=ya;                   %  kanssa
for j=1:n
   Y(j+1)=Y(j)+h*f(T(j),Y(j));
end;
```

Viitteitä:

`http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/06/L/L14dynumkalvot.pdf`
`http://www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/esim/eulerS.m`
(Listaus yllä)

19. mplD018.tex, mlD008.tex

Tarkastellaan yhtälöä $y' = -2\alpha(t-1)y$. Ratkaise aluksi analyyttisesti (saat käyttää Mapleakin.)

Totea kuvasta ja derivaattaehdosta yhtälön stabiilisuus/epästabiilisuusalueet. Ota kuvassa ja aina tarvittaessa vaikkapa $\alpha = 5$.

Ratkaise yhtälö sekä Eulerilla että BE:llä. Sopivia arvoja voisivat olla vaikkapa $h = 0.2$, väli: $[1, 4.5]$, $y(1) = 1$.
Vertaa kokeellisesti stabiilisuukäyttäytymistä teorian ennustamaan ja pane merkille, miten epästabiilisuus käytännössä ilmenee.
Tämä tehtävä soveltuu erityisen hyvin Maplella tehtäväksi, se on pitkälle ideoitu [HAM] sivulla 124, myös Euler ja BE ovat valmiina. (Koodit saa kurssin maple-hakemistosta.) ** Tulee aputiedostoon **

** apu puuttuu, editoi viitteet! **

Vihje:

Viitteitä:

`http://math.aalto.fi/opetus/kp3-ii/06/L/L14dynumkalvot.pdf`
`http://www.math.hut.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/esim/eulerS.m`
(Listaus yllä)

20. mplD019.tex [mplP017.tex]
Opiskelija ottaa lainaa 10000 euroa hetkellä $k = 0$ ja ryhtyy maksamaan sitä takaisin kuukauden päästä hetkellä $k = 1$. Kuukausikorko on 1% (huh!) ja takaisinmaksu tapahtuu kiintein maksuerin 450 EUR/kk

Olkoon y_k k:n kuukauden kuluttua jäljellä olevan velan määrä. Kirjoita differenssiyhtälö y_k:lle.

Muodosta taulukko ja graafinen esitys, jossa on pisteet (k, y_k), ja selvitä sen perusteella, miten kauan velan maksu kestää ja miten paljon rahaa opiskelijaparka käyttää koko projektiin.

Luokittelu: Differenssi- ja differentiaaliyhtalot, Maple-perusteet.

Vihje:

21.

a) Osoita, että funktio $\arctan \frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

b) Oletetaan, että funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että u ja v ovat harmonisia.

c) Olkoon $f(x,y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.

22. Seuraava toistokäsky soveltaa Eulerin menetelmää alkuarvotehtävän $y' = \sin(xy)$, $y(0) = 1$ ratkaisun likiarvon $y(1)$ laskemiseen. Kokeile käskyjä askelpituuksilla $h = 0.25, h = 0.1, h = 0.01$ ja $h = 10^{-4}$. Mikä menee pieleen viimeisessä kohdassa?

```
f:=(x,y)-> sin(x*y);
Digits:= 4;
n:= 4;
h:=1/n;
y[0] = 1;
for k from 0 to n-1 do  (paina tässä kohti Shift+Enter)
y[k+1]:= y[k]+h*f(k*h,y[k]) (samoin)
od;
```

Vihje:

23. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y'' + 3y' + 3y = 1 - e^{-x}, y(0) = 2, y'(0) = 0,$$

ja piirrä ratkaisun kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 10$.

Vihje: Diffyhtälön saat ratkaistua komennolla `dsolve`. Yhtälössä esiintyvät derivaatat voit ilmoittaa komennolla `diff`, ja derivaatan pisteessa 0 voit ilmaista derivaattaoperaattorilla `D(y)(0)`.

24.

Maple,Matlab (H2T10)

a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$y' - y = \cos x, \quad y(0) = 1$$

analyyttisesti Maplella ja numeerisesti Matlabilla. Piirrä ratkaisukäyrä.

b) Anna alkuarvoksi symboli c ja piirrä ratkaisukäyräparvi sopivalla välillä, kun $c = -0.9, -0.8, \ldots, 0$.

Miltä parvi näyttää suurilla x :n arvoilla. Tässä pitäisi erottua kolmenlaista käytöstä.

Vihje: Maple: dsolve, Matlab: ode45

Avainsanat: Differentiaaliyhtälö, alkuarvotehtävä, analyyttinen ratkaisu, numeerinen ratkaisu.

25.

Kirjoita heiluriyhtälö $\Theta'' + \frac{g}{L}\sin(\Theta) = 0$ ensimmäisen kertaluvun systeemiksi, tai toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi. Voit ottaa $g/L = 1$.

Laske ratkaisu sopivalla aikavälillä (esim. $[0, 10]$) ja kolmella erilaisella alkuarvolla, joilla saat erityyppiset ratkaisut.

Piirrä ratkaisukäyrät aikatasoon ja trajektorit faasitasoon.

26. Ratkaise RA-tehtävä

$$y'' = y^2 - 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Maplella. Yritä ensin analyyttista. Jos/kun mitään ei palaudu, voit asettaa esim `infolevel[dsolve]:=3:`.
Näet ainakin, mitä Maple yrittää.
Siirry sitten tyyppiin `numeric`, homma sujuu ongelmitta.

Muutaman kokeilun jälkeen huomasin, ettei sujukaan. Numeerisen ratkaisun määritteleminen parametrista riippuvaksi funkioksi on aikamoista temppuilua, tällaisella kurssilla ei kannata siihen paneutua, koska Matlab-ratkaisu on hyvin selkeä ja ongelmaton.

Muutetaan tehtävä helpommaksi:

Suorita Maplella suoraan reuna-arvotehtävän ratkaisu (luultavasti Maple laskee sen differessimenetelmällä). Syntaksi on aivan sama kuin alkuarvotehtävälle, nyt vain annetaan pelkät reunaehdot.

Helpin esimerkkien avulla pääset kiinni ratkaisufunktioon.

27.

a) Osoita, että funktio $\arctan \frac{y}{x}$ toteuttaa *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

(Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*)

b) Oletetaan, että funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on jatkuvat toiset osittaisderivaatat ja ne toteuttavat ns. *Cauchy-Riemannin* yhtälöt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Osoita, että u ja v ovat harmonisia.

c) Olkoon $f(x, y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.