Pekka Lehtelä

BV-funktiot metrisissä mitta-avaruuksissa

Perustieteiden korkeakoulu

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin tutkintoa varten.

Espoossa 12.08.2013.

Työn valvoja ja ohjaaja:

Prof. Juha Kinnunen

A!
Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

AALTO-YLIOPISTO
PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU

DIPLOMITYÖN
TIIVISTELMÄ

Tekijä: Pekka Lehtelä

Työn nimi: BV-funktiot metrisissä mitta-avaruuksissa

Päivämäärä: 12.08.2013 Kieli: Suomi Sivumäärä:4+52

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Professuuri: Matematiikka Koodi: Mat-1

Valvoja ja ohjaaja: Prof. Juha Kinnunen

BV-funktiot (engl. bounded variation) muodostavat geometrisen mittateorian ja variaatiolaskennan kannalta tärkeän Sobolev-funktioavaruuden laajennuksen. Euklidisessa avaruudessa BV-funktiot ovat lokaalisti integroituvia funktioita, joiden ensimmäiset heikot osittaisderivaatat ovat Radon-mittoja. Metrisissä avaruuksissa BV-funktiot määritellään käyttäen relaksoitua määritelmää Lipschitz-funktioavaruuden sulkeumana sopivan suppenemisen suhteen. Vastaavasti voidaan edelleen määritellä funktion variaatiomitta.

Tärkeän osan BV-funktioiden teoriaa muodostavat äärellisperimetriset joukot, eli joukot joiden karakteristiset funktiot ovat BV-funktioita ja siten joukon karakteristisen funktion variaatiomitta määrittää joukolle perimetrimitan. Äärellisperimetristen joukkojen tutkimuksessa keskeisimpiä työkaluja ovat isoperimetrinen epäyhtälö, joka antaa yhteyden joukon mitan ja sen perimetrin välille, sekä koareakaava, joka antaa variaatiomitalle esityskaavan funktion tasojoukkojen perimetrien avulla.

Joukon perimetri kuvaa tietyssä mielessä joukon reunan mittaa. Euklidisessa avaruudessa perimetrimitta saadaan joukon mittateoreettisen reunan $n-1$ -ulotteisena Hausdorffin mittana. Työn päätuloksena esitetään vastaava esityskaava metrisessä tapauksessa, jonka mukaan äärellisperimetrisen joukon perimetri saadaan rajoitetun Borel-funktion integraalina joukon mittateoreettisen reunan yli Hausdorff-tyyppisen mitan suhteen.

Avainsanat: BV-funktio, variaatiomitta, perimetri, isoperimetrinen epäyhtälö, koareakaava, struktuurilause

AALTO UNIVERSITY
SCHOOL OF SCIENCE

ABSTRACT OF THE
MASTER'S THESIS

Author: Pekka Lehtelä

Title: Functions of Bounded Variation on Metric Measure Spaces

Date: 12.08.2013 Language: Finnish Number of pages:4+52

Department of Mathematics and Systems Analysis

Professorship: Mathematics Code: Mat-1

Supervisor and instructor: Prof. Juha Kinnunen

Functions of bounded variation, abbreviated as BV functions, define an important extension of the Sobolev functions, which is used in the calculus of variations and geometric measure theory. In the Euclidean case, BV functions are locally integrable functions, whose weak first partial derivatives are Radon measures. In the metric case BV functions are defined using relaxation as the closure of Lipschitz functions with respect to suitable convergence. In a similar manner the variation measure of a function is defined.

An important part of the BV theory is the sets of finite perimeter, i.e. the sets whose characteristic functions are in BV. Thus the variation measure of the characteristic function defines the perimeter measure of the set. Main tools for the study of sets of finite perimeter are the isoperimetric inequality, which relates the measure of a set and its perimeter, and the coarea formula, which relates the variation measure of a function and the perimeters of its level sets.

The perimeter of a set gives, in a sense, a measure for the boundary of the set. In the Euclidean case the perimeter of a set is given by $n-1$ dimensional Hausdorff measure of the measure theoretic boundary of the set. As a main result of the thesis, a corresponding structure theorem is given in the metric setting. The theorem states that the perimeter of a set of finite perimeter is given by an integral of a bounded Borel function over the measure theoretic boundary of the set with respect to a Hausdorff type measure of codimension 1.

Keywords: Functions of bounded variation, variation measure, perimeter, isoperimetric inequality, coarea formula, structure theorem

Sisältö

1 Johdanto

Tässä diplomityössä tarkastellaan BV-funktioiden (engl. bounded variation) yleistystä metrisiin mitta-avaruuksiin. Geometrisessa mittateoriassa ja variaatiolaskennassa BV-funktiot muodostavat usein Sobolev-avaruutta $W^{1,1}$ luontevamman funktioavaruuden, sillä avaruus $W^{1,1}$ ei ole refleksiivinen, ja siten ei toteuta toivottuja kompaktisuustuloksia. BV-funktiot esiintyvät variaatiolaskennan ja osittaisdifferentiaaliyhtälöiden sovelluksissa geometriseen mittateoriaan, kuten minimipinta ongelmissa ja lineaarisesti kasvavien funktionaalien tarkastelussa. Tämä työ rajoittuu tarkastelemaan puhtaasti BV-funktioiden teoriaa.

BV-funktioavaruus avaruuden $\mathbb{R}^n$ yli koostuu L^1-funktioista, joiden ensimmäisen kertaluvun heikot osittaisderivaatat ovat Radon-mittoja. Selvästi kaikki Sobolev-funktiot toteuttavat tämän, jolloin BV-funktiot muodostavat Sobolev-avaruuden laajennuksen. Voidaan osoittaa, että variaatiomitta on alaspäin puolijatkuva L^1_{loc}-suppenemisen suhteen. BV-funktioiden teoriaa $\mathbb{R}^n$:ssä on tarkasteltu lähteessä [7]. Metrisessä avaruudessa määrittely heikkojen osittaisderivaattojen avulla ei onnistu, joten luontevin tapa määrittelyyn on niin kutsutun relaksoidun määritelmän kautta, jossa BV-funktioavaruus määritellään Lipschitz-funktioavaruuden sulkeumana sopivan suppenemisen suhteen.

Kappaleessa 2 esitellään lyhyesti tarvittavia metristen avaruuksien analyysin tuloksia, sekä yleisiä oletuksia avaruuden rakenteesta. Sobolev-avaruuksien yleistämiseksi metrisiin avaruuksiin määritellään gradientin vastineeksi ylägradientit ja heikot ylägradientit. Heikkojen ylägradienttien avulla määritellään Newton-avaruus $N^{1,p}$, joka koostuu L^p-funktioista, joiden heikot ylägradientit ovat L^p-funktioita. Newton-avaruudet määrittävät täten erään Sobolev-avaruuksien yleistyksen metrisiin avaruuksiin. Newton-avaruuksia käsitellään tarkemmin lähteessä [4].

Avaruudessa (X, d, μ) mitan μ oletetaan olevan tuplaava, jolloin samankeskeisten pallojen mitat ovat vertailtavissa keskenään. Lisäksi avaruuden oletetaan toteuttavan Poincarén epäyhtälön, joka antaa yhteyden funktion keskihajonnan ja funktion ylägradienttien L^1-normin välille. Mitan tuplaavuus ja Poincarén epäyhtälö ovat standardioletuksia yleisesti metristen avaruuksien analyysissä.

BV-funktioiden määritelmä ja perusominaisuuksia metrisissä avaruuksissa tarkastellaan kappaleessa 3. Funktion f variaatiomitan määrittelyssä tarkastellaan funktioon f L^1_{loc}-mielessä suppenevaa jonoa lokaalisti Lipschitz-funktioita f_j. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ funktion variaatiomitta joukosta A on alaspäin puolijatkuvuuden perusteella pienempi tai yhtäsuuri kuin limes infimum funktioon L^1_{loc}-mielessä suppenevien BV-funktioiden variaatiomitoista. Vastaavasti metrisessä tapauksessa on mielekästä käyttää relaksoitua määritelmää, määritellen variaatiomitan infimumina funktiojonojen f_j heikkojen ylägradienttien L^1-normien limes infimumista. Lauseessa 3.1 osoitetaan, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritelmä johtaa samaan tulokseen perinteisen määritelmän kanssa. Tämän jälkeen esitellään variaatiomitan perusominaisuuksia metrisissä avaruuksissa.

Variaatiomitan erikoistapauksena määritellään joukolle perimetri, joka saadaan joukon karakteristisen funktion variaatiomittana. Joukon perimetri kuvaa tietyssä mielessä joukon reunan mittaa. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ joukon E perimetri saadaan sen mittateoreettisen reunan, eli joukon, jossa joukolla E ja sen komplementilla on positiivinen tiheys, $n-1$ -ulotteisena Hausdorffin mittana. Vastaavasti metrisessä avaruudessa perimetrille saadaan esityskaava integraalina joukon mittateoreettisen reunan yli. Työn päätulosta, eli tätä esityskaavaa tarkastellaan kappaleessa 6.

Kappaleen 3 lopuksi näytetään, että variaatiomitta määrittelee Borel-säännöllisen ulkomitan avaruuteen X. Nämä BV-funktioiden perustulokset pohjautuvat pääosin lähteeseen [9].

Kappaleessa 4 todistetaan isoperimetrinen epäyhtälö BV-funktioille metrisissä mitta-avaruuksissa, jotka toteuttavat Poincarén epäyhtälön. Isoperimetrisen epäyhtälön mukaan joukon perimetrin pallossa $B(x, \lambda r)$ avulla saadaan yläraja joukon ja sen komplementin mittojen minimille pallossa $B(x, r)$. Tämä vastaa relatiivista isoperimetristä epäyhtälöä Euklidisessa tapauksessa.

Isoperimetrinen epäyhtälö on keskeinen työkalu äärellisperimetristen joukkojen tutkimuksessa, ja se pelaakin suurta roolia työn päätuloksen todistuksessa kappaleessa 6. Lisäksi on mahdollista osoittaa, että isoperimetrisen epäyhtälön toteuttavat avaruudet toteuttavat myös Poincarén epäyhtälön, jolloin tulokset ovat yhtäpitävät.

Toista BV-funktioiden teorian tärkeää työkalua, koareakaavaa, tarkastellaan kappaleessa 5. Koareakaavan antaa funktion variaatiomitalle esityskaavan integraalina funktion tasojoukkojen perimetrimitoista. Lisäksi koareakaavan seurauksena nähdään, että BV-funktioiden melkein kaikki tasojoukkot ovat äärellisperimetrisiä. Koareakaavaa on tarkasteltu lähteessä [10].

Tämän työn päätuloksena esitetään äärellisperimetrisen joukon perimetrille esityskaava kappaleessa 6. Kaavan avulla joukon E perimetri Borel-joukossa B voidaan esittää Borel-funktion integraalina joukon mittateoreettisen reunan ja joukon B leikkauksen yli Hausdorff-tyyppisen mitan suhteen. Oleellisena tuloksena saadaan ylä- ja alarajat integroitavalle funktiolle. Vastaavan esityskaavan olemassaolo ei-äärellisperimetrisille joukoille on yhä avoin ongelma. Lähteessä [1] todistetaan esityskaava Ahlfors-säännöllisille avaruuksille integraalina alhaalta rajoitetun Borel-funktion integraalina, ja lähteessä [2] yleistetään kaava ei-Ahlfors-säännöllisille avaruuksille, jotka toteuttavat tietyt rakenne-ehdot. Lähteessä [3] osoitetaan, että esityskaavassa integroitavalle funktiolle saadaan myös yläraja.

2 Ennakkotietoja ja merkintöjä

BV-funktioiden teorian yleistämiseksi metrisiin avaruuksiin esitetään ensin tarvittavia tuloksia metristen avaruuksien analyysistä. Sobolev- ja BV-funktioiden yleistämiseksi metrisiin avaruuksiin tarvitaan vastine funktioiden heikkojen derivaattojen käsitteelle. Vaikka gradientin käsite ei metrisessä tapauksessa ole mielekäs, voidaan funktiolle määritellä heikko ylägradientti eräänläisena gradientin normin yleistyksenä. Koska Sobolev-funktioiden määritelmässä esiintyy vain gradientin normi gradientin sijaan, on luontevaa määritellä Newton-avaruudet Sobolev-avaruuksien yleistyksenä korvaamalla määritelmässä gradientin normit heikoilla ylägradienteilla.

Työssä avaruus (X, d, μ) on täydellinen metrinen avaruus, jossa μ on Borel-säännöllinen ulkomitta. Lisäksi oletetaan mitan μ olevan tuplaava eli on olemassa vakio $C_D > 0$ siten, että

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_D \mu(B(x, r))$$

kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$. Mitan tuplaavuudesta seuraa epäyhtälö

$$\frac{\mu(B(y, R))}{\mu(B(x, r))} \leq C\Big(\frac{R}{r}\Big)^s$$

kaikilla $r \leq R$ ja $y \in B(x, r)$, sekä joillakin vakioilla $s > 1$ ja $C \geq 0$. Vakiota s kutsutaan avaruuden tuplausdimensioksi.

Seuraavaksi määritellään polkuparvelle moduli. Polkuparven moduli määrittää ulkomitan polkujen joukolle.

Määritelmä 2.1. Olkoon Υ kaikkien avaruuden X suoristuvien ei-vakiopolkujen joukko ja $\Gamma \subset \Upsilon$. Määritellään $F(\Gamma)$ kaikkien Borel-funktioiden $\rho : X \to [0, \infty]$ joille pätee

$$\int_\gamma \rho ds \geq 1 \qquad \text{kaikilla } \gamma \in \Gamma,$$

joukkona. Polkuparvelle $\Gamma \subset \Upsilon$ määritellään p-moduli,

$$\mathrm{Mod}_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in F(\Gamma)} \int_X \rho^p d\mu, \quad \text{jossa } p \in [1, \infty).$$

Seuraavaksi määritellään heikko ylägradientti. Heikko ylägradientti yleistää tietyssä mielessä gradientin metrisiin avaruuksiin. Eräs Sobolev-avaruuksien yleistys metrisiin avaruuksiin on ns. Newton-avaruudet, joissa gradientin vastineena toimii ylägradientti. Avaruuden täydellisyyssyistä määritellään se käyttäen heikon ylägradientin käsitettä.

Määritelmä 2.2. Olkoon $p \in [1, \infty]$. Ei-negatiivinen Borel-funktio g on funktion f p-heikko ylägradientti avaruudessa X, jos

$$|f(\gamma(a)) - f(\gamma(b))| \leq \int_\gamma g ds$$

p-melkein kaikilla poluilla $\gamma \in \Upsilon$, eli lukuunottamatta polkujoukkoa $\Gamma \subset \Upsilon$, jolle pätee $\mathrm{Mod}_p(\Gamma) = 0$. Vastaavasti ylägradientin määritelmässä ehdon on toteuduttava kaikilla poluilla.

Heikkojen ylägradienttien avulla voidaan määritellä Newton-avaruus.

Määritelmä 2.3. Newton-avaruus $N^{1,p}(X, d, \mu)$ koostuu funktioista $f \in L^p(X)$, joilla on p-heikko ylägradientti $g \in L^p(X)$. Määritellään funktiolle $f \in N^{1,p}(X)$ normi

$$||f||_{N^{1,p}} = \Big(\int_X |f|^p d\mu + \inf_g \int_X g^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}},$$

jossa infimum otetaan kaikkien p-heikkojen ylägradienttien joukosta.

Huomautus 2.1. *Funktiolla $f \in N^{1,p}(X)$ on olemassa minimaalinen p-heikko ylägradientti $g_f \in L^p(X)$. Funktio g_f on minimaalinen p-heikko ylägradientti, jos g_f on p-heikko ylägradientti ja pätee $g_f \leq g$ melkein kaikkialla, kaikilla p-heikoilla ylägradienteilla $g \in L^p(X)$. Tulos on osoitettu Björnien kirjan [4] lauseessa 2.5.*

Huomautus 2.2. *Funktio $f \in N^{1,p}(X)$ on on absoluuttisesti jatkuva melkein kaikilla poluilla γ avaruudessa X. Newton-avaruuden funktioiden absoluuttista jatkuvuutta käsitellään esimerkiksi Björnien kirjassa [4].*

Metrisessä tapauksessa ei sileitä funktioita voida mielekkäästi määritellä, vaan paras säännöllisyystulos, jota voidaan toivoa on Lipschitz-jatkuvuus. Havaitaan, että mikäli L on funktion f Lipschitz-vakio, $g \equiv L$ on funktion f eräs heikko ylägradientti. Määritellään nyt Lipschitz-funktioiden muodostama funktioavaruus.

Määritelmä 2.4. Funktioavaruus $Lip(A)$ koostuu Lipschitz-jatkuvista funktioista $f : A \to Y$, jossa $A \subset X$ ja Y on Banach-avaruus. Vastaavasti $f \in Lip_{loc}(A)$, jos $f \in Lip(B)$ kaikilla avoimilla joukoilla $B \subset\subset A$.

Huomautus 2.3. *Merkitään $B \subset\subset A$, jos joukon B sulkeuma on kompakti ja $\overline{B} \subset A$.*

Esitetään seuraavaksi tulon derivointikaavan yleistys funktioiden heikoille ylägradienteille.

Lemma 2.1. *Olkoon $u : X \to \mathbb{R}$ ja $v : X \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuvia p-melkein kaikilla poluilla $\gamma \in \Upsilon$ ja olkoon g_u ja g_v funktioiden p-heikot ylägradientit. Tällöin funktio*

$$|u|g_v + |v|g_u$$

on funktion uv p-heikko ylägradientti.

Lemman 2.1 todistus löytyy Heikkilän lisensiaattityöstä [9, s.12, Theorem 2]. Seuraava lemma antaa kaavan paloittain määriteltyjen funktioiden heikoille ylägradienteille.

Lemma 2.2. *Olkoon $E \subset X$ mitallinen joukko, $f : X \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva funktio p-melkein kaikilla poluilla $\gamma \in \Upsilon$ ja u ja v mitallisia funktioita, joilla on p-heikot ylägradientit $g_u, g_v \in L^p(X)$. Jos pätee $f\big|_E = u$ ja $f\big|_{X \setminus E} = v$, niin funktio $g = g_u\chi_E + g_v\chi_{X\setminus E}$ on funktion f p-heikko ylägradientti. Lisäksi, jos g_u ja g_v ovat minimaalisia p-heikkoja ylägradientteja, niin g on funktion f minimaalinen p-heikko ylägradientti.*

Lemman 2.2 todistus löytyy Björnien kirjasta [4, Lemma 2.18]. Seuraava lemma on tärkeä työkalu todistettaessa variaatiomitan olevan Borel-säännöllinen ulkomitta.

Lemma 2.3. *Olkoon $u, v \in N^{1,p}(A)$ ja $\phi \in Lip(A)$ siten, että $0 \leq \phi \leq 1$. Määritellään funktio $w = u(1-\phi) + v\phi$. Tällöin funktioiden w, u, v ja ϕ minimaalisille p-heikoille ylägradienteille g_w, g_u, g_v ja g_ϕ pätee*

$$g_w \leq g_u(1-\phi) + g_v\phi + |u-v|g_\phi \quad \textit{melkein kaikilla } x \in A.$$

Lemman 2.3 todistus löytyy Heikkilän lisensiaattityöstä [9, s. 18, Lemma 8]. Eräs merkittävä työkalu metristen avaruuksien analyysissä on Poincarén epäyhtälö (2.1), jonka mukaan funktion heikkojen ylägradienttien avulla saadaan yläraja funktion keskihajonnalle palloissa. Täten Poincarén epäyhtälö antaa yhteyden heikkojen ylägradienttien ja funktion lokaalin käytätytymisen välille.

Määritelmä 2.5. (Poincaré-avaruus) Avaruus (X, d, μ) on Poincaré avaruus, mikäli μ on tuplaava mitta, ja on olemassa vakiot $C > 0$ ja $\lambda \geq 1$ siten, että jokaisen Borel-funktion $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ ja funktion jokaisen heikon ylägradientin g välillä pätee yhteys

$$⨍_{B(x,r)} |f - f_{B(x,r)}| d\mu \leq Cr ⨍_{B(x,\lambda r)} g d\mu \tag{2.1}$$

kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$.

Huomautus 2.4. *Poincaré-avaruuksille voidaan osoittaa pätevän myös Poincarén epäyhtälöä vahvempi tulos, Sobolev-Poincarén epäyhtälö. Sobolev-Poincarén epäyhtälön mukaan on olemassa vakiot $C > 0$ ja $\lambda \geq 1$ siten, että funktioiden ja niiden heikkojen ylägradienttien välille saadaan yhteys*

$$\left(⨍_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|^{\frac{s}{s-1}} d\mu \right)^{\frac{s-1}{s}} \leq Cr ⨍_{B(x,\lambda r)} g d\mu \tag{2.2}$$

kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$. Tässä s on avaruuden tuplausdimensio. Sobolev-Poincarén epäyhtälön seuraaminen Poincarén epäyhtälöstä on osoitettu Hajlaszin ja Koskelan artikkelissa [8].

3 BV-funktiot metrisessä avaruudessa

3.1 Variaatiomitta

Kappaleessa esitellään määritelmä variaatiomitalle metrisessä avaruudessa, minkä perusteella määritellään BV-funktioavaruus. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ BV-funktiot määritellään L^1-funktioina, joiden ensimmäiset heikot derivaatat ovat Radonin mittoja. Metrisessä tapauksessa käytetään relaksoitua määritelmää, jossa BV-funktioavaruus määritellään Lipschitz-funktioavaruuden sulkeumana sopivan suppenemisen suhteen. Lauseessa 3.1 näytetään, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritelmä johtaa samaan tulokseen perinteisen määritelmän kanssa. Lopuksi esitetään BV-funktioiden keskeisiä ominaisuuksia lauseissa 3.2 ja 3.3.

Määritelmä 3.1. (Totaalivariaatio)
Olkoon $A \subset X$ avoin joukko, ja $u \in L^1_{loc}(A)$. Funktion u totaalivariaatio joukossa A määritellään kaavalla

$$||Du||(A) = \inf_{(u_j)} \left\{ \liminf_{j\to\infty} \int_A g_{u_j} d\mu \right\},$$

jossa (u_j) on jono siten, että $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, g_{u_j} on funktion u_j 1-heikko ylägradientti, ja $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä.

Mielivaltaiselle joukolle $A \subset X$ määritellään totaalivariaatio kaavalla

$$||Du||(A) = \inf\{||Du||(V) \ \mid \ A \subset V \text{ ja } V \text{ on avoin}\}.$$

Määritellään seuraavaksi BV-funktioavaruus.

Määritelmä 3.2. (BV-funktiot)
Funktion $u \in L^1(A)$ on totaalivariaatio joukossa A on rajoitettu, jos

$$||Du||(A) < \infty.$$

Tällöin merkitään $u \in BV(A)$. Vastaavasti funkion $u \in L^1_{loc}(A)$ totaalivariaatio joukossa A on lokaalisti rajoitettu, jos

$$||Du||(B) < \infty$$

kaikilla avoimilla joukoilla $B \subset\subset A$. Merkitään $u \in BV_{loc}(A)$.

Huomautus 3.1. *$\mathbb{R}^n$:ssä totaalivariaatio määritellään kaavalla*

$$||Du||_*(A) = \sup_{\varphi} \left\{ \int_A f \operatorname{div}(\varphi) dx \right\},$$

jossa $\varphi \in C_0^\infty(A)$ ja $|\varphi| \leq 1$. Tällöin määritellään avaruus $BV_*(A)$ funktioiden $u \in L^1(A)$, joille pätee $||Du||_*(A) < \infty$, joukkona. Lauseessa 3.1 osoitetaan, että $\mathbb{R}^n$:ssä $BV(A) = BV_*(A)$.

Seuraavassa lemmassa osoitetaan, että BV-funktiolle u on olemassa niin kutsuttu minimoiva jono lokaalisti Lipschitz-funktioita, jotka suppenevat kohti funktiota u L^1-mielessä ja joiden heikkojen ylägradienttien L^1-normien raja-arvona saadaan funktion u variaatiomitta. Minimoivan jonon olemassaolo on variaatiomitan ominaisuuksien todistamisessa keskeinen työkalu.

Lemma 3.1. *Olkoon $u \in BV(A)$. Tällöin on olemassa jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, sekä*

$$u_j \to u \;\; L^1_{loc}(A) \text{ mielessä} \quad \text{ja} \quad ||Du||(A) = \lim_{j\to\infty} \int_A g_{u_j}\, d\mu.$$

Todistus. Olkoon $u \in BV(A)$. Tällöin on olemassa jono $\{v_h^j\}_{h=i}^{\infty}$ siten, että $v_h^j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä, kun $h \to \infty$ ja

$$\int_A g_{v_h^j}\, d\mu < ||Du||(A) + \frac{1}{j}.$$

Jonoista $\{v_h^j\}_{h=i}^{\infty}$ voidaan konstruoida jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä ja lisäksi kaikilla $j \in \mathbb{N}$ pätee

$$\int_A g_{u_j}\, d\mu < ||Du||(A) + \frac{1}{j}.$$

Täten

$$\begin{aligned} ||Du||(A) &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_A g_{u_j}\, d\mu \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \left(||Du||(A) + \frac{1}{j} \right) \\ &= ||Du||(A), \end{aligned}$$

jolloin

$$||Du||(A) = \lim_{j\to\infty} \int_A g_{u_j}\, d\mu,$$

mikä todistaa väitteen. □

Todistetaan nyt, että määritelmä 3.1 johtaa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ samaan tulokseen perinteisen määritelmän kanssa.

Lause 3.1. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Tällöin $BV(A) = BV_*(A)$.*

Todistus. **Vaihe 1.** $BV(A) \subset BV_*(A)$
Olkoon $u \in BV(A)$. Lemman 3.1 mukaan on olemassa jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja

$$u_j \to u \;\; L^1_{loc}(A) \text{ mielessä, sekä}$$
$$\lim_{j\to\infty} \int_A g_{u_j}\, dx = ||Du||(A) < \infty.$$

$Lip_{loc}(A) \subset BV_*(A)$, joten variaatiomitan alaspäin puolijatkuvuuden [7, s.172, Theorem 1] perusteella

$$||Du||_*(A) \leq \liminf_{j\to\infty} ||Du_j||_*(A). \tag{3.1}$$

Funktioille u_j ja $\varphi \in C_0^\infty(A)$ pätee

$$\int_A u_j \operatorname{div}(\varphi)dx = -\int_A Du_j \cdot \varphi dx, \tag{3.2}$$

ja kun $|\varphi| \leq 1$, Cauchy-Schwarz-Bunyakovskyn epäyhtälön perusteella

$$-\int_A Du_j \cdot \varphi dx \leq \int_A |Du_j|dx = \int_A g_{u_j}dx. \tag{3.3}$$

Epäyhtälöiden (3.1), (3.2) ja (3.3) mukaan

$$||Du||_*(A) \leq \liminf_{j\to\infty} \int_A g_{u_j}dx = ||Du||(A) < \infty,$$

joten $u \in BV(A)$.

Vaihe 2. $BV_*(A) \subset BV(A)$.
Olkoon $u \in BV_*(A)$. Tällöin [7, s. 172, Theorem 2] on olemassa jono $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ siten, että $u_j \in BV_*(A) \cap C^\infty(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, sekä

$$u_j \to u \quad L^1(A) \text{ mielessä ja}$$
$$||Du_j||_*(A) \to ||Du||_*(A).$$

Tällöin

$$\liminf_{j\to\infty} \int_A g_{u_j}d\mu \leq \lim_{j\to\infty} ||Du_j||_*(A) = ||Du||_*(A) < \infty. \tag{3.4}$$

Kun otetaan infimum kaikkien jonojen (u_j), jossa $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä ja $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, epäyhtälön (3.4) perusteella saadaan $u \in BV(A)$. □

Seuraavassa lauseessa esitetään variaatiomitan perusominaisuuksia.

Lause 3.2. *($||Du||$:n perusominaisuuksia)*
Olkoon $u, v \in L^1_{loc}(X)$, avoimet $A, B \subset X$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee
(1) $||D(\alpha u)||(A) = |\alpha| \cdot ||Du||(A)$,
(2) $||D(u + v)||(A) \leq ||Du||(A) + ||Dv||(A)$,
(3) $||Du||(A \cup B) = ||Du||(A) + ||Du||(B)$, kun $A \cap B = \emptyset$ ja
(4) $||Du||(B) \leq ||Du||(A)$, kun $B \subset A$.

Todistus. **(1)** Jos $\alpha = 0$, $||D(0 \cdot u)||(A) = 0 \cdot ||Du||(A)$, jolloin (1) pätee.
Oletetaan $\alpha \neq 0$. Nyt lemman 3.1 perusteella voidaan valita jono $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ siten, että $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä ja

$$||Du||(A) = \lim_{j\to\infty} \int_A g_{u_j}d\mu. \tag{3.5}$$

Tällöin

$$||D(\alpha u)||(A) \leq \lim_{j\to\infty}\int_A g_{\alpha u_j}d\mu \leq \lim_{j\to\infty}\int_A |\alpha| g_{u_j}d\mu,$$

joten yhtälön (3.5) perusteella

$$||D(\alpha u)||(A) \leq |\alpha|||Du||(A).$$

Toisaalta lemman 3.1 perusteella voidaan valita jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, $u_j \to \alpha u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä ja

$$||D(\alpha u)||(A) = \lim_{j\to\infty}\int_A g_{u_j}d\mu. \tag{3.6}$$

Tällöin

$$\lim_{j\to\infty}\int_A g_{u_j}d\mu = |\alpha| \lim_{j\to\infty}\int_A \frac{g_{u_j}}{|\alpha|}d\mu \geq |\alpha| \lim_{j\to\infty}\int_A \tilde{g}_{u_j}d\mu,$$

jossa $\tilde{g}_{u_j}$ on funktion $\frac{u_j}{|\alpha|}$ heikko ylägradientti.

Nyt $||Du||(A)$ määritelmän, ja yhtälön (3.6) perusteella pätee

$$||D(\alpha u)||(A) \geq |\alpha|||Du||(A),$$

mikä todistaa väitteen (1).

(2) Jos $||Du||(A) = \infty$ tai $||Dv||(A) = \infty$, väite pätee.
Oletetaan $||Du||(A), ||Dv||(A) < \infty$. Lemman 3.1 mukaan voidaan valita jonot $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ ja $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, $v_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä ja $v_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä, sekä

$$\begin{aligned} ||Du||(A) &= \lim_{j\to\infty}\int_A g_{u_j}d\mu \quad \text{ja} \\ ||Dv||(A) &= \lim_{j\to\infty}\int_A g_{v_j}d\mu. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nyt

$$\begin{aligned} ||D(u+v)||(A) &\leq \liminf_{j\to\infty}\int_A g_{u_j+v_j}d\mu \\ &\leq \liminf_{j\to\infty}\Big(\int_A g_{u_j}d\mu + \int_A g_{v_j}d\mu\Big). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Toisaalta ehdon (3.7) mukaan pätee

$$\begin{aligned} \liminf_{j\to\infty}\int_A g_{u_j}d\mu = & \lim_{j\to\infty}\int_A g_{u_j}d\mu = ||Du||(A) \quad \text{ja} \\ \liminf_{j\to\infty}\int_A g_{v_j}d\mu = & \lim_{j\to\infty}\int_A g_{v_j}d\mu = ||Dv||(A), \end{aligned} \tag{3.9}$$

joten yhtälöiden (3.8) ja (3.9) perusteella

$$||D(u+v)||(A) \leq ||Du||(A) + ||Dv||(A),$$

mikä todistaa väitteen (2).
(3) (i) Näytetään

$$||Du||(A \cup B) \geq ||Du||(A) + ||Du||(B).$$

Jos $||Du||(A\cup B) = \infty$, väite pätee. Oletetaan $||Du||(A\cup B) < \infty$. Nyt lemman 3.1 mukaan voidaan valita jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \in Lip_{loc}(A \cup B)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A \cup B)$ mielessä ja

$$||Du||(A \cup B) = \lim_{j\to\infty} \int_{A\cup B} g_{u_j} d\mu. \tag{3.10}$$

Koska A ja B ovat pistevieraat, pätee

$$\lim_{j\to\infty} \int_{A\cup B} g_{u_j} d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_{A} g_{u_j} d\mu + \lim_{j\to\infty} \int_{B} g_{u_j} d\mu. \tag{3.11}$$

Oletuksen mukaan $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A\cup B)$ mielessä, joten pätee myös $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä ja $u_j \to u$ $L^1_{loc}(B)$ mielessä. Nyt

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \int_{A} g_{u_j} d\mu &\geq ||Du||(A) \quad \text{ja} \\ \lim_{j\to\infty} \int_{B} g_{u_j} d\mu &\geq ||Du||(B). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Yhtälöiden (3.10), (3.11) ja (3.12) mukaan

$$||Du||(A \cup B) \geq ||Du||(A) + ||Du||(B),$$

mikä todistaa väitteen (i).
(ii) Näytetään

$$||Du||(A) + ||Du||(B) \geq ||Du||(A \cup B).$$

Jos $||Du||(A) = \infty$ tai $||Du||(B) = \infty$, väite pätee. Oletetaan $||Du||(A) < \infty$ ja $||Du||(B) < \infty$. Tällöin lemman 3.1 perusteella voidaan valita jonot $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ ja $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä ja $v_j \to u$ $L^1_{loc}(B)$ mielessä, sekä

$$\begin{aligned} ||Du||(A) &= \lim_{j\to\infty} \int_{A} g_{u_j} d\mu \quad \text{ja} \\ ||Du||(B) &= \lim_{j\to\infty} \int_{B} g_{v_j} d\mu. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Määritellään jono $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että

$$w_j = \begin{cases} u_j & \text{joukossa } A \\ v_j & \text{joukossa } B \end{cases}$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin $w_j \in Lip_{loc}(A \cup B)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $w_j \to u$ $L^1_{loc}(A \cup B)$ mielessä. Nyt $||Du||(A \cup B)$ määritelmän mukaisesti

$$||Du||(A \cup B) \leq \liminf_{j\to\infty} \int_{A\cup B} g_{w_j} d\mu. \tag{3.14}$$

Koska A ja B ovat pistevieraat, pätee

$$\begin{aligned} \liminf_{j\to\infty} \int_{A\cup B} g_{w_j} d\mu &= \liminf_{j\to\infty} \left(\int_A g_{u_j} d\mu + \int_B g_{v_j} d\mu \right) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_A g_{u_j} d\mu + \lim_{j\to\infty} \int_B g_{v_j} d\mu. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Yhtälöiden (3.13) mukaan yhtälön (3.15) integraalit konvergoivat, ja siten yhtälön (3.14) perusteella

$$||Du||(A \cup B) \leq ||Du||(A) + ||Du||(B),$$

mikä todistaa väitteen (ii). Väitteet (i) ja (ii) yhdessä todistavat nyt väitteen (3).
(4) Jos $||Du||(A) = \infty$, väite pätee. Oletetaan $||Du||(A) < \infty$. Lemman 3.1 mukaan on olemassa jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, siten, että $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä. Koska $B \subset A$, pätee myös $u_j \in Lip_{loc}(B)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $u_j \to u$ $L^1_{loc}(B)$ mielessä.
Funktioiden u_j ylägradientit g_{u_j} ovat ei-negatiivisia, jolloin

$$\liminf_{j\to\infty} \int_B g_{u_j} d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int_A g_{u_j} d\mu,$$

joten kun otetaan infimum kaikkien jonojen $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ yli, on väite (4) todistettu. □

Seuraavassa lauseessa näytetään, että variaatiomitta on alaspäin puolijatkuva L^1_{loc}-suppenemisen suhteen.

Lause 3.3. *($||Du||$:n alaspäin puolijatkuvuus) Olkoon $u \in L^1_{loc}(X)$, avoin $A \subset X$ ja $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \in BV_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä. Tällöin kaikille avoimille $B \subset A$ pätee*

$$||Du||(B) \leq \liminf_{j\to\infty} ||Du_j||(B).$$

Erityisesti, jos $\sup_{j\in\mathbb{N}} ||Du_j||(B) < \infty$ kaikilla $B \subset\subset A$, niin $u \in BV_{loc}(A)$.

Todistus. Lemman 3.1 perusteella jokaista $j \in \mathbb{N}$ kohden voidaan valita jono $\{u_h^j\}_{h=i}^{\infty}$ siten, että

$$||Du_j||(B) = \lim_{h\to\infty} \int_B g_{u_h^j}\, d\mu.$$

Jonoista $\{u_h^j\}$ voidaan konstruoida osajono $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että

$$\int_B g_{v_j} d\mu < ||Du_j||(B) + \frac{1}{j} \quad \text{ja} \quad v_j \to u \;\; L^1_{loc}(B) \text{ mielessä.}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} ||Du||(B) &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_B g_{v_j} d\mu \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \left(||Du_j||(B) + \frac{1}{j} \right) \\ &= \liminf_{j\to\infty} ||Du_j||(B), \end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen. □

3.2 Perimetri

Kappaleessa määritellään Borel-joukoille perimetrimitta joukon karakteristisen funktion variaatiomittana. Tällöin joukko on äärellisperimetrinen joukossa A, jos ja vain jos sen karakteristinen funktio on BV-funktio kyseisessä joukossa. Joukon perimetrin voidaan ajatella kuvaavan tietyssä mielessä joukon reunan mittaa ja avaruudessa $\mathbb{R}^n$ perimetrimitta yhtyykin joukon mittateoreettisen reunan $n-1$ -ulotteiseen Hausdorffin mittaan. Lisäksi lausessa 3.4 esitetään perimetrimitalle päteviä keskeisiä tuloksia.

Määritelmä 3.3. (Perimetri) Olkoon $A \subset X$ avoin joukko ja $E \subset X$ Borel-joukko. Tällöin joukon E perimetri joukossa A on

$$\mathrm{P}(E, A) = ||D\chi_E||(A).$$

Joukko E on äärellisperimetrinen joukossa A, jos pätee

$$\mathrm{P}(E, A) < \infty.$$

Esitetään seuraavaksi perimetrimitan keskeisiä ominaisuuksia.

Lause 3.4. *(Perimetrimitan perusominaisuuksia) Olkoon $E, F \subset X$ Borel-joukkoja, ja $A \subset X$ avoin. Tällöin pätee*

(1) Jos $\mu((E \triangle F) \cap A) = 0$, niin $\mathrm{P}(E, A) = \mathrm{P}(F, A)$.
Tässä $E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ on joukkojen symmetrinen erotus.

(2) $\mathrm{P}(E \cup F, A) + \mathrm{P}(E \cap F, A) \leq \mathrm{P}(E, A) + \mathrm{P}(F, A)$.

(3) $\mathrm{P}(E, A) = \mathrm{P}(X \setminus E, A)$.

(4) Olkoon $A_1, A_2 \subset X$ avoimia joukkoja siten, että $A_1 \subset A_2$ ja $\mathrm{dist}(E, A_2 \setminus A_1) > 0$. *Tällöin* $\mathrm{P}(E, A_1) = \mathrm{P}(E, A_2)$.

(5) Olkoon $E_i, i = 1, 2, ...$ Borel-joukkoja. Tällöin

$$\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i, A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(E_i, A). \tag{3.16}$$

(6) $\max\{\mathrm{P}(E \cup F, A), \mathrm{P}(E \cap F, A), \mathrm{P}(E \setminus F, A)\} \leq \mathrm{P}(E, A) + \mathrm{P}(F, A)$.

Todistus. **(1)** Oletuksen mukaan $\mu((E \triangle F) \cap A) = 0$ eli

$$\int_A |\chi_F - \chi_E| d\mu = 0. \tag{3.17}$$

Lemman 3.1 perusteella valitaan jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$,

$$u \to \chi_E \quad L^1_{loc}(A) \text{ mielessä, ja} \tag{3.18}$$

$$||D\chi_E||(A) = P(E, A) = \lim_{j \to \infty} \int_A g_{u_j} d\mu. \tag{3.19}$$

Seuraavaksi näytetään, että $u_j \to \chi_F \quad L^1_{loc}(A)$ mielessä.
Olkoon $K \subset\subset A$. Tällöin

$$\begin{aligned} \int_K |u_j - \chi_F| d\mu &= \int_K |(u_j - \chi_E) + (\chi_E - \chi_F)| d\mu \\ &\leq \int_K |u_j - \chi_E| d\mu + \int_K |\chi_E - \chi_F| d\mu. \end{aligned}$$

Nyt yhtälöiden (3.17) ja (3.18) perusteella

$$\begin{aligned} &\int_K |u_j - \chi_E| d\mu \to 0 \quad \text{ja} \\ &\int_K |\chi_E - \chi_F| d\mu = 0, \end{aligned}$$

jolloin $u_j \to \chi_F \quad L^1_{loc}(A)$ mielessä. Tällöin

$$\mathrm{P}(F, A) \leq \liminf_{j \to \infty} \int_A g_{u_j} d\mu = \mathrm{P}(E, A).$$

Symmetrian perusteella pätee $\mathrm{P}(E, A) \leq \mathrm{P}(F, A)$, jolloin $\mathrm{P}(E, A) = \mathrm{P}(F, A)$.

(2) Jos $\mathrm{P}(E, A) = \infty$ tai $\mathrm{P}(F, A) = \infty$, väite tosi.
Oletetaan, että $\mathrm{P}(E, A) < \infty$ ja $\mathrm{P}(F, A) < \infty$. Lemman 3.1 perusteella valitaan jonot $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ ja $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $v_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $u_j \to \chi_E \quad L^1_{loc}(A)$ mielessä, $v_j \to \chi_F \quad L^1_{loc}(A)$ mielessä, sekä

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E, A) &= \lim_{j \to \infty} \int_A g_{u_j} d\mu \quad \text{ja} \\ \mathrm{P}(F, A) &= \lim_{j \to \infty} \int_A g_{v_j} d\mu \end{aligned} \tag{3.20}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \max\{u_j, v_j\} &\to \chi_{E\cup F} \quad L^1_{loc}(A) \text{ mielessä ja} \\ \min\{u_j, v_j\} &\to \chi_{E\cap F} \quad L^1_{loc}(A) \text{ mielessä.} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Lemman 2.2 perusteella funktioille $\max\{u_j, v_j\}$ ja $\min\{u_j, v_j\}$ saadaan p-heikot ylägradientit

$$\begin{aligned} g_{\max\{u_j,v_j\}} &= g_{u_j}\chi_{\{u_j\geq v_j\}} + g_{v_j}\chi_{\{u_j<v_j\}} \quad \text{ja} \\ g_{\min\{u_j,v_j\}} &= g_{u_j}\chi_{\{u_j<v_j\}} + g_{v_j}\chi_{\{u_j\geq v_j\}}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nyt

$$\mathrm{P}(E\cup F, A) + \mathrm{P}(E\cap F, A) \leq \liminf_{j\to\infty}\Big(\int_A g_{\max\{u_j,v_j\}}d\mu + \int_A g_{\min\{u_j,v_j\}}d\mu\Big).$$

Tällöin yhtälöiden (3.22) perusteella

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E\cup F, A) + \mathrm{P}(E\cap F, A) &\leq \liminf_{j\to\infty}\Big(\int_A (g_{u_j}\chi_{\{u_j\geq v_j\}} + g_{v_j}\chi_{\{u_j<v_j\}})d\mu \\ &\quad + \int_A (g_{u_j}\chi_{\{u_j<v_j\}} + g_{v_j}\chi_{\{u_j\geq v_j\}})d\mu\Big) \\ &= \liminf_{j\to\infty}\int_A g_{u_j}d\mu + \liminf_{j\to\infty}\int_A g_{v_j}d\mu, \end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\mathrm{P}(E\cup F, A) + \mathrm{P}(E\cap F, A) \leq \mathrm{P}(E, A) + \mathrm{P}(F, A).$$

(3) Lemman 3.1 perusteella voidaan valita jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, $u_j \to \chi_E$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä ja

$$\mathrm{P}(E, A) = \lim_{j\to\infty}\int_A g_{u_j}d\mu. \tag{3.23}$$

Määritellään jono $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $v_j = 1 - u_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin $v_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $v_h \to 1 - \chi_E = \chi_{X\setminus E}$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä. Siten

$$\mathrm{P}(X\setminus E, A) \leq \liminf_{j\to\infty}\int_A g_{v_h}d\mu. \tag{3.24}$$

Toisaalta $g_{u_j} = g_{v_j}$, joten epäyhtälöstä (3.24) saadaan

$$\mathrm{P}(X\setminus E, A) \leq \liminf_{j\to\infty}\int_A g_{u_h}d\mu = \mathrm{P}(E, A).$$

Symmetrian perusteella $\mathrm{P}(E,A)\leq \mathrm{P}(X\setminus E,A)$, joten $\mathrm{P}(E,A)=\mathrm{P}(X\setminus E,A)$.
(4) $A_1\subset A_2$, joten $\mathrm{P}(E,A_1)\leq \mathrm{P}(E,A_2)$ variaatiomitan monotonisuuden perusteella. Näytetään, että $\mathrm{P}(E,A_2)\leq \mathrm{P}(E,A_1)$.
Määritellään joukko $A_\delta=\{x\in A_1 \mid \operatorname{dist}(x,A_2\setminus A_1)>\delta\}$. Oletuksen mukaan $\operatorname{dist}(E,A_2\setminus A_1)>0$, joten on olemassa $\delta>0$ siten, että $E\subset A_\delta$. Määritellään funktio

$$\eta=\begin{cases}1 & \text{joukossa } A_\delta,\\ \frac{\operatorname{dist}(x,A_2\setminus A_1)}{\delta}, & \text{kun } 0<\operatorname{dist}(x,A_2\setminus A_1)<\delta,\\ 0 & \text{joukossa } \overline{A_2\setminus A_1}.\end{cases}$$

Nyt $\eta\in Lip(A_2)$ ja $0\leq\eta\leq 1$ joukossa A_2. Lemman 3.1 mukaan voidaan valita jono $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ siten, että $u_j\in Lip_{loc}(A_1)$ kaikilla $j\in\mathbb{N}$ ja $u_j\to\chi_E$ $L^1_{loc}(A_1)$ mielessä, sekä

$$\mathrm{P}(E,A_1)=\lim_{j\to\infty}\int_{A_1} g_{u_j}d\mu. \tag{3.25}$$

Tällöin myös $\eta u_j\in Lip_{loc}(A_2)$ kaikilla $j\in\mathbb{N}$ ja $\eta u_j\to\chi_E$ $L^1_{loc}(A_2)$ mielessä. Nyt

$$\mathrm{P}(E,A_2)\leq\liminf_{j\to\infty}\int_{A_2} g_{\eta u_j}d\mu. \tag{3.26}$$

Lemman 2.1 mukaisesti funktion ηu_j eräs p-heikko ylägradientti on $g_{\eta u_j}=\eta g_{u_j}+u_j g_\eta$, joten epäyhtälöstä (3.26) saadaan

$$\mathrm{P}(E,A_2)\leq\liminf_{j\to\infty}\int_{A_2}(\eta g_{u_j}+u_j g_\eta)d\mu. \tag{3.27}$$

Funktion η valinnan perusteella $\operatorname{supp}(\eta)\subset A_1$, joten

$$\liminf_{j\to\infty}\int_{A_2}(\eta g_{u_j}+u_j g_\eta)d\mu\leq\lim_{j\to\infty}\int_{A_1}\eta g_{u_j}d\mu+\lim_{j\to\infty}\int_{A_1}u_j g_\eta d\mu. \tag{3.28}$$

Toisaalta

$$\lim_{j\to\infty}\int_{A_1}u_j g_\eta d\mu=\int_{A_1}\frac{\chi_E\chi_{A_1\setminus A_\delta}}{\delta}d\mu=0,$$

joten arvioimalla $\eta=1$ joukossa A_1, epäyhtälöistä (3.27) ja (3.28) saadaan

$$\mathrm{P}(E,A_2)\leq\lim_{j\to\infty}\int_{A_1}g_{u_j}d\mu=\mathrm{P}(E,A_1).$$

(5) Kohdan (2) perusteella $\mathrm{P}(E_1\cup E_2,A)\leq\mathrm{P}(E_1,A)+\mathrm{P}(E_2,A)$, joten jatkamalla iterointia saadaan

$$\mathrm{P}(\cup_{i=1}^n E_i,A)\leq\sum_{i=1}^n\mathrm{P}(E_i,A). \tag{3.29}$$

Olkoon $K\subset\subset A$. Nyt

$$\int_K\chi_{\cup_{i=1}^n E_i}d\mu\leq\int_K 1d\mu<\infty,$$

joten Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen perusteella

$$\chi_{\cup_{i=1}^{n} E_i} \to \chi_{\cup_{i=1}^{\infty} E_i} \quad L^1_{loc}(A) \text{ mielessä.}$$

Variaatiomitan alaspäin puolijatkuvuuden (Lause 3.3) perusteella

$$\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i, A) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}(\cup_{i=1}^{n} E_i, A). \tag{3.30}$$

Nyt epäyhtälöiden (3.29) ja (3.30) perusteella

$$\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i, A) \leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(E_i, A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(E_i, A),$$

mikä todistaa väitteen.

(6) Kohdan (2) perusteella

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \cup F, A) &\leq \mathrm{P}(E, A) + \mathrm{P}(F, A) \quad \text{ja} \\ \mathrm{P}(E \cap F, A) &\leq \mathrm{P}(E, A) + \mathrm{P}(F, A), \end{aligned} \tag{3.31}$$

jolloin riittää todistaa $\mathrm{P}(E \backslash F, A) \leq \mathrm{P}(E, A) + \mathrm{P}(F, A)$. Toisaalta $E \backslash F = E \cap (X \backslash F)$, joten kohdan (2) perusteella

$$\mathrm{P}(E \setminus F, A) \leq \mathrm{P}(E, A) + \mathrm{P}(X \setminus F, A). \tag{3.32}$$

Kohdan (3) perusteella $\mathrm{P}(X \setminus F, A) = \mathrm{P}(F, A)$, joten epäyhtälö (3.32) saadaan muotoon

$$\mathrm{P}(E \setminus F, A) \leq \mathrm{P}(E, A) + \mathrm{P}(F, A), \tag{3.33}$$

jolloin epäyhtälöt (3.31) ja (3.33) todistavat väitteen. □

3.3 $||Du||$ on mitta

Kappaleessa todistetaan, että variaatiomitta $||Du||$ on Borel-säännöllinen ulkomitta avaruudessa X. Lauseessa 3.5 esitettävän tuloksen todistamiseksi esitetään tarvittavia lemmoja.

Aluksi todistetaan tekniset lemmat 3.2, 3.3, joiden mukaan avoimissa joukoissa M ja N määritellyt Lipschitz-funktiot u ja v voidaan yhdistää joukkojen unionissa määritellyksi Lipschitz-funktioksi w siten, että $w = u$ joukon N komplementissa, $w = v$ joukon M komplementissa, ja funktion w ylägradienttien L^1-normille saadaan yläraja funktioiden u ja v, sekä näiden ylägradienttien avulla.

Tämän jälkeen lemmoissa 3.4 ja 3.5 osoitetaan, että variaatiomitta on sisäsäännöllinen, ja että variaatiomitta on äärellisesti subadditiivinen avoimilla joukoilla. Lopuksi variaatiomittaa koskevat tulokset kootaan yhteen lauseessa 3.5 näyttäen, että variaatiomitta on Borel-säännöllinen ulkomitta.

Lemma 3.2. *Olkoon M ja N avoimia joukkoja siten, että N on rajoitettu ja $\partial N \cap \partial M = \emptyset$. Tällöin on olemassa avoimet joukot $H \subset\subset M \cap N$, $C_1 \subset M$ ja $C_2 \subset N$, sekä vakio $c = c(M,N)$ siten, että kaikilla $u \in Lip(M)$ ja $v \in Lip(N)$ on olemassa $w \in Lip(M \cup N)$ siten, että*

(1)

$$w = \begin{cases} u & \textit{joukossa } M \setminus N, \\ v & \textit{joukossa } N \setminus M, \end{cases}$$

ja

$$\int_{M \cup N} g_w d\mu \leq \int_M g_u d\mu + \int_N g_v d\mu + c \int_H |u - v| d\mu.$$

(2) Lisäksi kaikilla funktioilla $\sigma \in L^1_{loc}(M \cup N)$ ja joukoilla $K \subset\subset M \cup N$ pätee

$$\int_K |w - \sigma| d\mu \leq \int_{K \cap C_1} |u - \sigma| d\mu + \int_{K \cap C_2} |v - \sigma| d\mu.$$

Todistus. Merkitään $\eta = \operatorname{dist}(\partial M, \partial N)$. Määritellään funktio ϕ siten, että

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{joukossa } \overline{N \setminus M} \cup \{x \in M \cap N \mid \operatorname{dist}(x, \partial N) > \frac{2}{3}\eta\}, \\ 0 & \text{joukossa } \overline{M \setminus N} \cup \{x \in M \cap N \mid \operatorname{dist}(x, \partial N) < \frac{1}{3}\eta\}, \\ \frac{3 \operatorname{dist}(x, \partial N) - \eta}{\eta} & \text{joukossa } \{x \in M \cap N \mid \frac{1}{3}\eta < \operatorname{dist}(x, \partial N) < \frac{2}{3}\eta\}. \end{cases}$$

Tällöin pätee $\phi \in Lip(M \cup N)$ ja $0 \leq \phi \leq 1$ joukossa $M \cup N$. Määritellään joukot

$$C_1 = \{x \in M \cup N \mid \phi(x) < 1\}, \quad C_2 = \{x \in M \cup N \mid \phi(x) > 0\}$$

ja $H = C_1 \cap C_2 \subset\subset M \cap N$, sekä funktio $w = u(1 - \phi) + v\phi$, jolloin $w = u$ joukossa $M \setminus N$ ja $w = v$ joukossa $N \setminus M$.
Lemman 2.3 mukaan

$$\int_{M \cup N} g_w d\mu \leq \int_{M \cup N} \left(g_u(1 - \phi) + g_v \phi + g_\phi |u - v|\right) d\mu. \tag{3.34}$$

Funktion ϕ määritelmän mukaisesti $\operatorname{supp}(g_\phi) \subset H$, jossa $g_\phi = \frac{3}{\eta}$. Lisäksi $\phi = 1$ joukon N komplementissa ja $\phi = 0$ joukon M komplementissa, joten yhtälöstä (3.34) saadaan

$$\int_{M \cup N} g_w d\mu \leq \int_M g_u d\mu + \int_N g_v d\mu + \frac{3}{\eta} \int_H |u - v| d\mu,$$

mikä todistaa väitteen (1).

Olkoon $K \subset\subset M \cup N$ ja $\sigma \in L^1_{loc}(M \cup N)$. Joukko K voidaan esittää muodossa

$$K = (K \cap (M \setminus N)) \cup (K \cap (N \setminus M)) \cup (K \cap (M \cap N)),$$

jolloin

$$\begin{aligned}\int_K |w-\sigma|d\mu &= \int_{K\cap(M\setminus N)} |u-\sigma|d\mu + \int_{K\cap(N\setminus M)} |v-\sigma|d\mu \\ &+ \int_{K\cap(M\cap N)} |(1-\phi)(u-\sigma)+\phi(v-\sigma)|d\mu.\end{aligned} \tag{3.35}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}K\cap(M\cap N) &= (K\cap M\cap N\cap\{\phi=0\})\cup(K\cap M\cap N\cap\{\phi=1\}) \\ &\cup(K\cap M\cap N\cap\{0<\phi<1\}),\end{aligned}$$

joten yhtälö (3.35) saadaan muotoon

$$\begin{aligned}\int_K |w-\sigma|d\mu &= \int_{K\cap((M\setminus N)\cup(M\cap N\cap\{\phi=0\}))} |u-\sigma|d\mu \\ &+ \int_{K\cap((N\setminus M)\cup(M\cap N\cap\{\phi=1\}))} |v-\sigma|d\mu \\ &+ \int_{K\cap(M\cap N)\cap\{0<\phi<1\}} |(1-\phi)(u-\sigma)|d\mu. \\ &+ \int_{K\cap(M\cap N)\cap\{0<\phi<1\}} |\phi(v-\sigma)|d\mu.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Arvioimalla yhtälön (3.36) toiseksi viimeisessä termissä $\phi=0$ ja viimeisessä termissä $\phi=1$ saadaan arvio

$$\int_K |w-\sigma|d\mu \le \int_{K\cap C_1} |u-\sigma|d\mu + \int_{K\cap C_2} |v-\sigma|d\mu,$$

mikä todistaa väitteen (2). □

Seuraavassa lemmassa esitetään lemman 3.2 muunnelma, jonka perusteella voidaan määritellä edellisen lemman tapaisesti Lipschitz-funktio w, mutta tällä kertaa funktio w on määritelty joukossa $M'\cup N'$, jossa $M'\subset\subset M$ ja $N'\subset\subset N$. Tämä lemma on keskeinen työkalu variaatiomitan subadditiivisuuden osoittamisessa.

Lemma 3.3. *Olkoon M, N, M' ja N' avoimia joukkoja siten, että $M'\subset\subset M$ ja $N'\subset N$. Tällöin on olemassa avoin joukko $H\subset M\cap N$ ja vakio $c=c(M,M',N')$ siten, että kaikilla $u\in Lip(M)$ ja $v\in Lip(N)$ on olemassa funktio $w\in Lip(M'\cup N')$, jolle pätee*

$$\int_{M'\cup N'} g_w d\mu \le \int_M g_u d\mu + \int_N g_v d\mu + c\int_H |u-v|d\mu.$$

Todistus. Merkitään $\eta = \mathrm{dist}(M', N' \backslash M)$. Koska $M' \subset\subset M$, pätee $\eta \geq \mathrm{dist}(M', \partial M) > 0$. Nyt voidaan määritellä funktio

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{joukossa } \overline{M'} \cup \{x \in M' \cap N' \mid \mathrm{dist}(x, \partial M') < \frac{1}{3}\eta\} \\ 0 & \text{joukossa } \overline{N' \setminus M} \cup \{x \in M' \cap N' \mid \mathrm{dist}(x, \partial M') > \frac{2}{3}\eta\} \\ \frac{2\eta - 3\,\mathrm{dist}(x, \partial M')}{\eta} & \text{joukossa } \{x \in M' \cap N' \mid \frac{1}{3}\eta < \mathrm{dist}(x, \partial N) < \frac{2}{3}\eta\} \end{cases}$$

Tällöin $\phi \in Lip(M' \cup N')$ ja $0 \leq \phi \leq 1$. Määritellään joukko $H = \{x \in M' \cap N' \mid 0 < \phi(x) < 1\}$ ja funktio $w = \phi u + (1 - \phi)v$. Tällöin $w \in Lip(M' \cup N')$. Nyt lemman 2.3 perusteella

$$\int_{M' \cup N'} g_w d\mu \leq \int_{M' \cup N'} (g_u \phi + g_v(1 - \phi) + g_\phi |u - v|) d\mu. \tag{3.37}$$

Koska $\phi = 0$ joukon M' komplementissa ja $\phi = 1$ joukon $N' \setminus M$ komplementissa, sekä $\mathrm{supp}(g_\phi) \subset H$, jossa $g_\phi = \frac{3}{\eta}$, saadaan epäyhtälön (3.37) oikealle puolelle arvio

$$\int_{M' \cup N'} (g_u \phi + g_v(1 - \phi) + g_\phi |u - v|) d\mu \leq \int_{M'} g_u d\mu + \int_{N' \setminus M} g_v d\mu + \frac{3}{\eta} \int_H |u - v| d\mu. \tag{3.38}$$

Funktioiden u ja v heikot ylägradientit ovat ei-negatiivisia, ja $M' \subset M$, sekä $N' \setminus M \subset N$, joten epäyhtälöä (3.38) voidaan arvioida ylöspäin vaihtamalla integrointialueita, jolloin epäyhtälöistä (3.37) ja (3.38) saadaan

$$\int_{M' \cup N'} g_w d\mu \leq \int_M g_u d\mu + \int_N g_v d\mu + \frac{3}{\eta} \int_H |u - v| d\mu,$$

mikä todistaa väitteen. □

Näytetään seuraavaksi, että variaatiomitta on sisäsäännöllinen. Tätä tarvitaan muun muassa lauseen 3.5 todistuksessa. Seuraavan lemman todistus metrisessä tapauksessa on hyvin tekninen ja perustuu sopivan joukkoperheen $C_i \subset A$, $(i = 1, 2, \ldots)$ konstruoimiseen ja lemman 3.2 soveltamiseen induktiivisesti kyseisen joukkoperheen avulla määriteltyihin funktioihin.

Lemma 3.4. *Olkoon A avoin joukko. Tällöin*

$$||Du||(A) = \sup\{||Du||(B) \mid B \text{ avoin, } B \subset\subset A.\}$$

Todistus. Jos $\sup_{B \subset\subset A} ||Du||(B) = \infty$, väite pätee.
Oletetaan $\sup_{B \subset\subset A} ||Du||(B) < \infty$. Määritellään joukot

$$\begin{aligned} A_j &= \left\{x \in A \mid \mathrm{dist}(x, \partial A) > \frac{1}{j}\right\}, \\ C_1 &= A_2 \quad \text{ja} \\ C_k &= A_{2k} \setminus \overline{A_{2k-3}}, \quad \text{kun } k = 2, 3, ... \end{aligned}$$

Nyt $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ ja joukoille C_k pätee

$$\begin{aligned} C_{2k} \cap C_{2p} &= \emptyset, \quad \text{kun } k \neq p, \text{ ja} \\ C_{2k+1} \cap C_{2p+1} &= \emptyset, \quad \text{kun } k \neq p. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Kiinnitetään $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{2n} ||Du||(C_k) = \sum_{k=1}^{n} ||Du||(C_{2k}) + \sum_{k=1}^{n} ||Du||(C_{2k-1}). \tag{3.40}$$

Yhtälöiden (3.39) ja lauseen 3.2 (3) perusteella yhtälö (3.40) voidaan esittää muodossa

$$\sum_{k=1}^{2n} ||Du||(C_k) = ||Du||(\cup_{k=1}^{n} C_{2k}) + ||Du||(\cup_{k=1}^{n} C_{2k-1}). \tag{3.41}$$

Toisaalta $\cup_{k=1}^{n} C_{2k} \subset A$ ja $\cup_{k=1}^{n} C_{2k-1} \subset A$, joten lauseen 3.2(4) perusteella yhtälöä (3.41) voidaan arvioida ylöspäin. Tällöin

$$\sum_{k=1}^{2n} ||Du||(C_k) \leq 2||Du||(A) \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}. \tag{3.42}$$

Kun $n \to \infty$ saadaan yhtälöstä (3.42)

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||Du||(C_k) \leq 2||Du||(A) < \infty.$$

Koska sarja konvergoi, kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\tilde{k}$ siten, että

$$\sum_{k=\tilde{k}}^{\infty} ||Du||(C_k) \leq \frac{\varepsilon}{6}. \tag{3.43}$$

Valitaan $B = A_{2\tilde{k}-2}$.

Propositio 3.1. *Nyt on olemassa $B' \subset\subset B$ ja jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, $u_j \in Lip_{loc}(A \setminus \overline{B'})$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ siten, että $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A \setminus \overline{B'})$ mielessä ja*

$$\limsup_{j \to \infty} \int_{A \setminus \overline{B'}} g_{u_j} d\mu \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.44}$$

Todistus. Olkoon $B' = A_{2\tilde{k}-3} \subset\subset A_{2\tilde{k}-2} = B$. Määritellään joukot $D_j = C_{\tilde{k}+j-1}$. Tällöin $A \setminus \overline{B'} = \cup_{j=1}^{\infty} D_j$. Valitaan jono $\{\psi_{m,j}\}_{m=1}^{\infty}$ siten, että $\psi_{m,j} \in Lip_{loc}(D_j)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, $\psi_{m,j} \to u$ $L^1_{loc}(D_j)$ mielessä, kun $m \to \infty$ ja

$$\int_{D_i} g_{\psi_{m,j}} d\mu \leq ||Du||(D_j) + \frac{1}{m2^j}. \tag{3.45}$$

Seuraavaksi määritellään jono $\{u_{m,j}\}_{m=1}^{\infty}$, jossa $u_{m,j} \in Lip_{loc}(\cup_{h=1}^{j} D_h)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, jonoista $\psi_{m,j}$ induktiolla:
1. Olkoon $u_{m,1} = \psi_{m,1}$. Tällöin jonon $\psi_{m,1}$ valinnan perusteella $u_{m,1} \in Lip_{loc}(D_1)$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$.
2. Oletetaan, että $u_{m,j} \in Lip_{loc}(\cup_{h=1}^{j} D_h)$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$ ja näytetään, että löydetään jono $u_{m,j+1} \in Lip_{loc}(\cup_{h=1}^{j+1} D_h)$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$.
Sovelletaan lemmaa 3.2 joukkoihin $M = D_{j+1}$ ja $N = \cup_{h=1}^{j} D_h$, sekä funktioihin $u = \psi_{m,j+1} \in Lip_{loc}(M)$ ja $v = u_{m,j} \in Lip_{loc}(N)$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$.
Tällöin löydetään funktio $u_{m,j+1} \in Lip_{loc}(\cup_{h=1}^{j+1} D_h)$ ja joukko $H_j \subset \cup_{h=1}^{j} D_h \cap D_{j+1}$ siten, että

$$\int_{\cup_{h=1}^{j+1} D_h} g_{u_{m,i+1}} d\mu \leq \int_{D_{j+1}} g_{\psi_{m,j+1}} d\mu + \int_{\cup_{h=1}^{j} D_h} g_{u_{m,j}} d\mu + c_j \int_{H_j} |\psi_{m,j+1} - u_{m,j}| d\mu. \tag{3.46}$$

Joukossa H_j pätee $u_{m,j} = \psi_{m,j}$ ja $\psi_{m,j} \to u \;\; L^1_{loc}(H_j)$ mielessä, joten voidaan olettaa

$$c_j \int_{H_j} |\psi_{m,j+1} - u_{m,j}| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{12 \cdot 2^j}. \tag{3.47}$$

Arvioimalla epäyhtälöllä (3.46) iteratiivisesti epäyhtälön (3.46) oikean puolen keskimmäistä termiä saadaan epäyhtälö muotoon

$$\int_{\cup_{h=1}^{j+1} D_h} g_{u_{m,j+1}} d\mu \leq \sum_{h=1}^{j+1} \int_{D_h} g_{u_{m,h}} d\mu + \sum_{h=1}^{j+1} c_h \int_{H_h} |\psi_{m,h+1} - u_{m,h}| d\mu. \tag{3.48}$$

Arvioiden (3.45) ja (3.47) perusteella saadaan arvioitua epäyhtälöä (3.48) ylöspäin, jolloin saadaan epäyhtälö

$$\int_{\cup_{h=1}^{j+1} D_h} g_{u_{m,j+1}} d\mu \leq \sum_{h=1}^{j+1} \left(||Du||(D_h) + \frac{1}{m \cdot 2^h} \right) + \sum_{h=1}^{j+1} \frac{\varepsilon}{12 \cdot 2^h}. \tag{3.49}$$

Nyt arvion (3.43) perusteella epäyhtälöstä (3.49) saadaan

$$\int_{\cup_{h=1}^{j+1} D_h} g_{u_{m,j+1}} d\mu \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{m}.$$

Määritellään jono $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ siten, että $u_m = u_{m,j}$ joukossa $\cup_{h=1}^{j-1} D_h$, jolloin

$$\int_{A \setminus \overline{B'}} g_{u_m} d\mu = \lim_{j \to \infty} \int_{\cup_{h=1}^{j}} g_{u_{m,h}} d\mu \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m}.$$

Siten

$$\limsup_{j \to \infty} \int_{A \setminus \overline{B'}} g_{u_j} d\mu \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Osoitetaan seuraavaksi induktiolla, että $u_{m,j} \to u \;\; L^1_{loc}(A \setminus \overline{B'})$ mielessä, kun $m \to \infty$.

1. $u_{m,1} = \psi_{m,1}$ ja funktioiden $\psi_{m,j}$ valinnan mukaan $\psi_{m,j} \to u \ \ L^1_{loc}(D_1)$ mielessä.
2. Oletetaan, että $u_{m,j} \to u \ \ L^1_{loc}(\cup_{h=1}^{j} D_h)$ mielessä.
Olkoon $K \subset\subset \cup_{h=1}^{j+1} D_h$ kompakti. Tällöin soveltamalla lemmaa 3.2(2) joukkoihin $N = \cup_{h=1}^{j} D_h$ ja $M = D_{j+1}$ ja funktioon $\sigma = u$ löydetään joukot $K_1 \subset\subset M$ ja $K_2 \subset\subset N$ siten, että

$$\int_K |u_{m,j+1} - u| d\mu \leq \int_{K_1} |\psi_{m,j+1} - u| d\mu + \int_{K_2} |u_{m,j} - u| d\mu. \tag{3.50}$$

Funktioiden $\psi_{m,j}$ valinnan ja induktio-oletuksen perusteella perusteella

$$\int_{K_1} |\psi_{m,j+1} - u| d\mu \to 0, \quad \text{ja} \quad \int_{K_2} |u_{m,j} - u| d\mu \to 0,$$

kun $m \to \infty$, jolloin epäyhtälön (3.50) perusteella $u_{m,j+1} \to u \ \ L^1(K)$ mielessä.

Näytetään vielä, että $u_m \to u \ \ L^1_{loc}(A \setminus \overline{B'})$ mielessä.
Olkoon $K \subset\subset A \setminus \overline{B'}$. Nyt on olemassa $j \in \mathbb{N}$ siten, että $K \subset\subset \cup_{h=1}^{j} D_h$, jolloin

$$\int_K |u_m - u| d\mu = \int_K |u_{m,j} - u| d\mu \to 0.$$

$\square$

Jatketaan lemman 3.4 todistusta. Olkoon jono $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $v_j \in Lip_{loc}(B)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, $v_j \to u \ \ L^1_{loc}(B)$ mielessä ja

$$||Du||(B) = \lim_{j\to\infty} \int_B g_{v_j} d\mu. \tag{3.51}$$

Ota $\varepsilon > 0$. Nyt proposition 3.1 ja lemman 3.2 perusteella on olemassa funktiojono $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$, $w_j \in Lip_{loc}((A \setminus \overline{B'}) \cup B)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja joukko $H \subset B \cap (A \setminus \overline{B'})$ siten, että $w_j \to u \ \ L^1_{loc}(A)$ mielessä ja

$$\int_A g_{w_j} d\mu \leq \int_{A\setminus\overline{B'}} g_{u_j} d\mu + \int_B v_j d\mu + c\int_H |u_j - v_j| d\mu. \tag{3.52}$$

Proposition 3.1 perusteella voidaan arvioida

$$\int_{A\setminus\overline{B'}} g_{u_j} d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.53}$$

ja koska $u_j \to u \ \ L^1_{loc}(H)$ mielessä ja $v_j \to u \ \ L^1_{loc}(H)$ mielessä voidaan arvioida

$$c\int_H |u_j - v_j| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.54}$$

Nyt arvioiden (3.52), (3.53) ja (3.54) perusteella

$$||Du||(A) \leq ||Du||(B) + \varepsilon,$$

mikä todistaa väitteen. $\square$

Todistetaan seuraavaksi variaatiomitan äärellinen subadditiivisuus avoimille joukoille. Tämä seuraa helposti lemmoista 3.3 ja 3.4.

Lemma 3.5. *Kaikille avoimille joukoille A ja B pätee*

$$||Du||(A \cup B) \leq ||Du||(A) + ||Du||(B).$$

Todistus. Lemman 3.4 perusteella riittää näyttää

$$||Du||(A' \cup B') \leq ||Du||(A) + ||Du||(B)$$

kun $A' \subset\subset A$ ja $B' \subset\subset B$.

Oletetaan, että $||Du||(A) < \infty$ ja $||Du||(B) < \infty$. Tällöin lemman 3.1 mukaan voidaan valita jonot $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, $u_j \in Lip(A)$ ja $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$, $v_j \in Lip(B)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ siten, että $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä ja $v_j \to u$ $L^1_{loc}(B)$ mielessä, sekä

$$\begin{aligned} ||Du||(A) &= \lim_{j\to\infty} \int_A g_{u_j} d\mu \quad \text{ja} \\ ||Du||(B) &= \lim_{j\to\infty} \int_A g_{v_j} d\mu. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Lemman 3.3 perusteella on olemassa funktiojono $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $w_j \in Lip(A' \cup B')$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja joukko $H \subset\subset A \cap B$ siten, että

$$\int_{A' \cup B'} g_{w_j} d\mu \leq \int_A g_{u_j} d\mu + \int_B g_{v_j} d\mu + c \int_H |u_j - v_j| d\mu. \tag{3.56}$$

Koska $u_j \to u$ $L^1_{loc}(H)$ mielessä ja $v_j \to u$ $L^1_{loc}(H)$ mielessä,

$$c \int_H |u_j - v_j| d\mu \to 0.$$

Tällöin, kun $j \to \infty$, saadaan epäyhtälö (3.56) yhtälöiden (3.55) perusteella muotoon

$$||Du||(A' \cup B') \leq ||Du||(A) + ||Du||(B),$$

mikä todistaa väitteen. □

Todistetaan nyt variaatiomitan olevan Borel-säännöllinen ulkomitta.

Lause 3.5. $||Du||$ *on Borel-säännöllinen ulkomitta.*

Todistus. **Vaihe 1** Näytetään, että $||Du||$ on ulkomitta.
(i) Selvästi $||Du||(\emptyset) = 0$.
(ii)Olkoon $B \subset A$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa avoimet joukot $V_A \supset A$ ja $V_B \supset B$ siten, että

$$\begin{aligned} ||Du||(V_A) &= ||Du||(A) + \varepsilon \quad \text{ja} \\ ||Du||(V_B) &= ||Du||(B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Koska $B \subset A \subset V_A$, voidaan olettaa $V_B \subset V_A$, jolloin lauseen 3.2(4) mukaan $||Du||(V_B) \leq ||Du||(V_A)$. Kun $\varepsilon \to 0$, saadaan

$$||Du||(B) \leq ||Du||(A).$$

(iii) Olkoon $A_k \subset X$ avoimia ($k = 1, 2, ...$), $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ ja $\varepsilon > 0$. Lemman 3.4 perusteella voidaan valita $B \subset\subset A$ siten, että

$$||Du||(A) \leq ||Du||(B) + \varepsilon. \tag{3.57}$$

Koska $\overline{B}$ on kompakti, ja $\overline{B} \subset A$, jollakin $n < \infty$ pätee $B \subset \overline{B} \subset \cup_{k=1}^{n} A_k$. Variaatiomitan monotonisuuden (kohta (ii)) perusteella

$$||Du||(B) \leq ||Du||(\cup_{k=1}^{n} A_k). \tag{3.58}$$

Lemman 3.5 perusteella saadaan arvio

$$||Du||(\cup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} ||Du||(A_k). \tag{3.59}$$

Kun $n \to \infty$ epäyhtälöiden (3.58), (3.59), sekä (3.57) mukaan

$$||Du||(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} ||Du||(A_k) + \varepsilon.$$

Nyt $\varepsilon \to 0$ todistaa subadditiivisuuden avoimille joukoille.

Olkoon $A_k \subset X$ ($k = 1, 2, ...$) mielivaltaisia joukkoja, ja $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Olkoon $V_k (k = 1, 2, ...)$ avoimia joukkoja siten, että $A_k \subset V_k$ kaikilla $k = 1, 2, ...$ Tällöin myös $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} V_k$, joten

$$\inf_V \{||Du||(V) \;\mid\; A \subset V\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{V_k} \{||Du||(V_k) \;\mid\; A_k \subset V_k\}.$$

Täten mielivaltaisille A_k pätee

$$||Du||(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} ||Du||(A_k),$$

mikä todistaa väitteen.

Vaihe 2 Näytetään, että $||Du||$ on Borel-ulkomitta.
Olkoon $A, B \subset X$ joukkoja, joille pätee $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Tällöin voidaan valita avoin joukko $U \supset A \cup B$ siten, että

$$||Du||(A \cup B) \geq ||Du||(U) - \varepsilon. \tag{3.60}$$

Määritellään joukot

$$\begin{aligned} V_A &= \left\{ x \in X \mid \operatorname{dist}(x, \partial A) < \frac{\operatorname{dist}(A,B)}{3} \right\} \cap U \quad \text{ja} \\ V_B &= \left\{ x \in X \mid \operatorname{dist}(x, \partial B) < \frac{\operatorname{dist}(A,B)}{3} \right\} \cap U. \end{aligned}$$

Tällöin V_A ja V_B ovat avoimia, sekä $A \subset V_A$ ja $B \subset V_B$. Lisäksi $V_A \cap V_B = \emptyset$. Koska $V_A \cup V_B \subset U$, pätee

$$||Du||(A \cup B) \geq ||Du||(V_A \cup V_B) - \varepsilon. \tag{3.61}$$

Lauseen 3.2(3) perusteella epäyhtälöstä (3.61) saadaan

$$||Du||(A \cup B) \geq ||Du||(V_A) + ||Du||(V_B) - \varepsilon. \tag{3.62}$$

Koska $A \subset V_A$ ja $B \subset V_B$ pätee epäyhtälön (3.62) ja variaatiomitan monotonisuuden perusteella

$$||Du||(A \cup B) \geq ||Du||(A) + ||Du||(B) - \varepsilon. \tag{3.63}$$

Kun $\varepsilon \to \infty$, pätee variaatiomitan subadditiivisuuden ja epäyhtälön (3.63) perusteella

$$||Du||(A \cup B) = ||Du||(A) + ||Du||(B),$$

joten Carathéodoryn kriteerin mukaan $||Du||$ on Borel-ulkomitta.

Vaihe 3 Näytetään, että $||Du||$ on Borel-säännöllinen ulkomitta. Olkoon $A \subset X$. Jos $||Du||(A) = \infty$, pätee $||Du||(A) = ||Du||(X) = \infty$ ja X on Borel-joukko, joten väite tosi.

Oletetaan, että $||Du||(A) < \infty$. Valitaan avoimet joukot V_i $(i = 1, 2, ...)$ siten, että $A \subset V_i$ kaikilla i, sekä $||Du||(V_i) = ||Du||(A) + \frac{1}{i}$. Määritellään joukko $V = \cap_{i=1}^{\infty} V_i$. Tällöin V on Borel-joukko, ja pätee

$$||Du||(V) = \lim_{i \to \infty} ||Du||(V_i) = ||Du||(A).$$

$\square$

4 Isoperimetrinen epäyhtälö

Isoperimetrinen epäyhtälö on keskeinen työkalu äärellisperimetristen joukkojen tutkimuksessa, sillä se antaa yhteyden mitan μ ja joukon perimetrimitan välille. Isoperimetrisen epäyhtälön mukaan äärellisperimetrisen joukon E, ja sen komplementin, mitoille pallossa $B(x,r) \subset X$ saadaan yläraja, joka riippuu joukon perimetristä suuremmassa pallossa $B(x,\lambda r)$, pallon mitasta, säteestä r ja avaruuden tuplausdimensiosta. Tämä vastaa Euklidisissa avaruuksissa relatiivista isoperimetrista epäyhtälöä, joskin Euklidisessa tapauksessa saadaan yläraja, joka riippuu ainoastaan joukon perimetristä pallossa $B(x,r)$, johtuen Lebesguen mitan Ahlfors-säännöllisyydestä.

Isoperimetrinen epäyhtälö on esitetty lauseessa 4.1. Lauseen todistamiseksi esitetään myös Sobolev-Poincarén epäyhtälöstä seuraava lemma 4.1. Voidaan myös osoittaa, että isoperimetrinen epäyhtälö on yhtäpitävä Poincarén epäyhtälön kanssa. Tämän todistus kuitenkin sivuutetaan.

Lemma 4.1. *Olkoon X Poincaré-avaruus tuplausdimensiolla $s > 1$ ja avoin joukko $A \subset X$. Tällöin kaikille $u \in BV_{loc}(A)$ pätee*

$$||u - u_{B(x,r)}||_{L^{\frac{s}{s-1}}(B(x,r))} \leq \frac{Cr}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}} ||Du||(B(x,\lambda r))$$

kaikilla palloilla $B(x,r) \subset A$.

Todistus. Koska $u \in BV_{loc}(A)$, pätee $||Du||(B(x,\lambda r)) < \infty$. Nyt lemman 3.1 mukaan voidaan valita jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että $u_j \in Lip_{loc}(B(x,\lambda r))$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $u_j \to u$ $L^1_{loc}(B(x,\lambda r))$ mielessä, sekä

$$||Du||(B(x,\lambda r)) = \lim_{j\to\infty} \int_{B(x,\lambda r)} g_{u_j} d\mu. \tag{4.1}$$

Sobolev-Poincarén epäyhtälön (2.2) mukaan

$$\left(\fint_{B(x,r)} |u_j - u_{j\,B(x,r)}|^{\frac{s}{s-1}} d\mu \right)^{1-\frac{1}{s}} \leq Cr \fint_{B(x,\lambda r)} g_{u_j} d\mu. \tag{4.2}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} Cr \fint_{B(x,\lambda r)} g_{u_j} d\mu &= \frac{Cr}{\mu(B(x,\lambda r))} \int_{B(x,\lambda r)} g_{u_j} d\mu \\ &\leq \frac{Cr}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,\lambda r)} g_{u_j} d\mu. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Tällöin epäyhtälöiden (4.2) ja (4.3) perusteella

$$||u_j - u_{j_{B(x,r)}}||_{L^{\frac{s}{s-1}}(B(x,r))} \leq \frac{Cr}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}} \int_{B(x,\lambda r)} g_{u_j} d\mu. \tag{4.4}$$

Kun $j \to \infty$, yhtälön (4.1) perusteella epäyhtälö (4.4) saadaan muotoon

$$||u - u_{B(x,r)}||_{L^{\frac{s}{s-1}}(B(x,r))} \le \frac{Cr}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}} ||Du||(B(x,\lambda r)),$$

mikä todistaa väitteen. $\square$

Todistetaan nyt isoperimetrinen epäyhtälö.

Lause 4.1. *(Isoperimetrinen epäyhtälö) Olkoon X Poincaré-avaruus tuplausdimensiolla $s > 1$. Tällöin on olemassa vakio C_I siten, että kaikille palloille $B(x,r) \subset X$ ja äärellisperimetrisille joukoille $E \subset X$ pätee*

$$\min\{\mu(B(x,r) \cap E), \mu(B(x,r) \setminus E)\}^{1-\frac{1}{s}} \le \frac{C_I r}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}} \operatorname{P}(E, B(x,\lambda r)).$$

Todistus. **Vaihe 1.** Näytetään, että

$$\frac{1}{2}\min\{\mu((B(x,r) \cap E), \mu(B(x,r) \setminus E))\}^{1-\frac{1}{s}} \le ||u - u_{B(x,r)}||_{L^{\frac{s-1}{s}}(B(x,r))},$$

kun tarkastellaan funktiota $u = \chi_E$. Funktiolle u pätee

$$u_{B(x,r)} = \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \chi_E d\mu = \frac{\mu(E \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))},$$

joten

$$||u - u_{B(x,r)}||_{L^{\frac{s-1}{s}}(B(x,r))} = \left(\int_{B(x,r)} \left| \chi_E - \frac{\mu(E \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \right|^{\frac{s}{s-1}} d\mu \right)^{1-\frac{1}{s}}. \tag{4.5}$$

Toisaalta yhtälön (4.5) integraali voidaan jakaa pistevieraisiin joukoihin $B(x,r) \cap E$ ja $B(x,r) \setminus E$, jolloin yhtälö saadaan muotoon

$$\begin{aligned} ||u - u_{B(x,r)}||_{L^{\frac{s-1}{s}}(B(x,r))} &= \Big(\int_{B(x,r) \cap E} \left| 1 - \frac{\mu(E \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \right|^{\frac{s}{s-1}} d\mu \\ &+ \int_{B(x,r) \setminus E} \left| \frac{\mu(E \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \right|^{\frac{s}{s-1}} d\mu \Big)^{1-\frac{1}{s}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Oletetaan ensin, että

$$\mu(B(x,r) \cap E) \le \mu(B(x,r) \setminus E). \tag{4.7}$$

Tällöin yhtälöä (4.6) voidaan arvioida alaspäin yhtälön oikean puolen ensimmäisellä termillä, jolloin saadaan epäyhtälö

$$\begin{aligned} ||u - u_{B(x,r)}||_{L^{\frac{s-1}{s}}(B(x,r))} &\ge \int_{B(x,r) \cap E} \left| \frac{\mu(B(x,r)) - \mu(E \cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \right|^{\frac{s}{s-1}} d\mu \\ &= \frac{\mu(B(x,r) \setminus E)}{\mu(B(x,r))} \mu(B(x,r) \cap E)^{1-\frac{1}{s}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Oletuksen (4.7) perusteella

$$\frac{\mu(B(x,r)\setminus E)}{\mu(B(x,r))} \geq \frac{1}{2},$$

joten epäyhtälöstä (4.8) saadaan

$$||u - u_{B(x,r)}||_{L^{\frac{s-1}{s}}(B(x,r))} \geq \frac{1}{2}\mu(B(x,r)\cap E)^{1-\frac{1}{s}}. \tag{4.9}$$

Seuraavaksi oletetaan, että

$$\mu(B(x,r)\setminus E) \leq \mu(B(x,r)\cap E). \tag{4.10}$$

Tällöin yhtälöä (4.6) voidaan arvioida alaspäin yhtälön oikean puolen toisella termillä, jolloin epäyhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} ||u - u_{B(x,r)}||_{L^{\frac{s-1}{s}}(B(x,r))} &\geq \int_{B(x,r)\setminus E} \left|\frac{\mu(E\cap B(x,r))}{\mu(B(x,r))}\right|^{\frac{s}{s-1}} d\mu \\ &= \frac{\mu(B(x,r)\cap E)}{\mu(B(x,r))}\mu(B(x,r)\setminus E)^{1-\frac{1}{s}}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Vastaavasti kuin edellä, voidaan oletuksen (4.10) perusteella arvioida

$$||u - u_{B(x,r)}||_{L^{\frac{s-1}{s}}(B(x,r))} \geq \frac{1}{2}\mu(B(x,r)\setminus E)^{1-\frac{1}{s}}. \tag{4.12}$$

Tällöin epäyhtälöt (4.9) ja (4.12) todistavat vaiheen 1.

Vaihe 2. Näytetään, että

$$\min\{\mu(B(x,r)\cap E), \mu(B(x,r)\setminus E)\}^{1-\frac{1}{s}} \leq \frac{C_I r}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}}\,\mathrm{P}(E, B(x,\lambda r)).$$

Vaiheen 1 perusteella

$$\min\{\mu(B(x,r)\cap E), \mu(B(x,r)\setminus E)\}^{1-\frac{1}{s}} \leq 2||u - u_{B(x,r)}||_{L^{\frac{s-1}{s}}(B(x,r))}, \tag{4.13}$$

joten soveltamalla lemmaa 4.1 epäyhtälöön (4.13) saadaan

$$\min\{\mu(B(x,r)\cap E), \mu(B(x,r)\setminus E)\}^{1-\frac{1}{s}} \leq \frac{C_I r}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}}||Du||(B(x,\lambda r)). \tag{4.14}$$

Yhtälössä (4.14) $u = \chi_E$, joten pätee

$$\min\{\mu(B(x,r)\cap E), \mu(B(x,r)\setminus E)\}^{1-\frac{1}{s}} \leq \frac{C_I r}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}}\,\mathrm{P}(E, B(x,\lambda r)). \tag{4.15}$$

$\square$

5 Koareakaava

Toinen hyödyllinen työkalu BV-funktioiden tarkastelussa on koareakaava, joka esitetään lauseessa 5.1. Koareakaava antaa funktion totaalivariaatiolle esityskaavan integraalina funktion tasojoukkojen perimetrimitoista.

Lause 5.1. *(Koareakaava)*
Olkoon $\Omega \subset X$ avoin ja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Määritellään joukko

$$E_t = \{x \in X \mid u(x) > t\}, \quad \textit{kun } t \in \mathbb{R}.$$

Tällöin kaikille avoimille joukoille $A \subset\subset \Omega$ pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E_t, A)dt = ||Du||(A).$$

Todistus. **Vaihe 1.** Näytetään, että kaikille $u \in Lip_{loc}(\Omega)$ pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E_t, A)dt \leq ||Du||(A).$$

Määritellään funktio

$$m(t) = \int_{A \setminus E_t} g_u d\mu. \tag{5.1}$$

$A \setminus E_t \subset A \setminus E_{t+\alpha}$ kaikilla $\alpha > 0$, joten funktio m on ei-vähenevä. Funktio m on myös rajoitettu, sillä

$$\int_{A \setminus E_t} g_u d\mu \leq \int_A g_u d\mu = ||Du||(A) < \infty.$$

Täten m on differentioituva melkein kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Olkoon t piste, jossa m on differentioituva, ja määritellään jono funktioita $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ siten, että

$$v_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{joukossa } E_{t+\frac{1}{j}}, \\ j(u(x)-t) & \text{joukossa } E_t \setminus E_{t+\frac{1}{j}}, \\ 0 & \text{joukossa } A \setminus E_t. \end{cases}$$

Tällöin $v_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$.

Näytetään, että $v_j \to \chi_{E_t}$ $L^1(A)$ mielessä. Koska v_j poikkeaa funktiosta χ_{E_t} ainoastaan joukossa $E_t \setminus E_{t+\frac{1}{j}}$, pätee

$$\int_A |v_j(x) - \chi_{E_t}(x)| d\mu = \int_{E_t \setminus E_{t+\frac{1}{j}}} |j(u(x)-t) - 1| d\mu. \tag{5.2}$$

Toisaalta $0 \leq j(u(x)-t) \leq 1$ tarkasteltavassa joukossa, joten voidaan arvioida

$$\int_{E_t \setminus E_{t+\frac{1}{j}}} |j(u(x)-t) - 1| d\mu \leq \mu((E_t \setminus E_{t+\frac{1}{j}}) \cap A) \to 0, \quad \text{kun } j \to \infty. \tag{5.3}$$

Tällöin yhtälön (5.2) ja epäyhtälön (5.3) perusteella $v_j \to \chi_{E_t}$ $L^1(A)$ mielessä ja siten lauseen 3.3 perusteella

$$\mathrm{P}(E_t, A) \leq \liminf_{j\to\infty} ||Dv_j||(A). \tag{5.4}$$

Funktioiden v_j ylägradienteille g_{u_j} pätee

$$g_{v_j} = \begin{cases} jg_u & \text{joukossa } E_t \setminus E_{t+\frac{1}{j}}, \\ 0 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

joten

$$\begin{aligned} \int_A g_{v_j} d\mu &= j \int_{(E_t \setminus E_{t+\frac{1}{j}})\cap A} g_u d\mu \\ &= j\Big(\int_{A\setminus E_{t+\frac{1}{j}}} g_u d\mu - \int_{A\setminus E_t} g_u d\mu \Big). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Nyt yhtälöiden (5.1) ja (5.5) perusteella

$$\int_A g_{v_j} d\mu = j\left(m\left(t+\frac{1}{j}\right) - m(t)\right) \to m'(t) \quad \text{kun } j \to \infty. \tag{5.6}$$

Nyt epäyhtälön (5.4) ja yhtälön (5.6) perusteella

$$\mathrm{P}(E_t, A) \leq m'(t). \tag{5.7}$$

Integroimalla epäyhtälöä (5.7) puolittain saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E_t, A) dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} m'(t) dt = ||Du||(A).$$

Vaihe 2. Näytetään, että kaikille $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E_t, A) dt \leq ||Du||(A).$$

Jos $u \notin BV(A)$, $||Du||(A) = \infty$, jolloin väite pätee.

Oletetaan, että $u \in BV(A)$. Tällöin lemman 3.1 perusteella voidaan valita jono $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, jossa $u_j \in Lip_{loc}(A)$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ siten, että $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä ja

$$||Du||(A) = \lim_{j\to\infty} \int_A g_{u_j} d\mu.$$

Määritellään joukot

$$E^j_t = \{x \in A \mid u_j > t\}.$$

Nyt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{E_t^j}(x) - \chi_{E_t}(x)| dt = \int_{\min\{u,u_j\}}^{\max\{u,u_j\}} dt = |u_j(x) - u(x)|.$$

Tällöin pätee

$$\int_A |u_j(x) - u(x)| d\mu = \int_A \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{E_t^j}(x) - \chi_{E_t}(x)| dt \Big) d\mu. \tag{5.8}$$

Soveltamalla Fubinin lausetta yhtälöön (5.8) saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_A |\chi_{E_t^j}(x) - \chi_{E_t}(x)| d\mu \Big) dt = \int_A |u_j(x) - u(x)| d\mu \to 0, \tag{5.9}$$

sillä $u_j \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä.

Yhtälön (5.9) perusteella $\chi_{E_t^j} \to \chi_{E_t}$ $L^1(A)$ mielessä melkein kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Nyt lauseen 3.3 mukaan

$$\mathrm{P}(E_t, A) \leq \liminf_{j\to\infty} \mathrm{P}(E_t^j, A),$$

jolloin integroimalla puolittain saadaan epäyhtälö

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E_t, A) dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \liminf_{j\to\infty} \mathrm{P}(E_t^j, A) dt. \tag{5.10}$$

Nyt soveltamalla Fatoun lemmaa ja vaiheen 1 tulosta yhtälöön (5.10) saadaan haluttu tulos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E_t, A) dt \leq ||Du||(A).$$

Vaihe 3. Näytetään, että

$$||Du||(A) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E_t, A) dt.$$

kun $u \in L^1_{loc}(A)$. Jos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E_t, A) dt = \infty,$$

väite pätee. Oletetaan, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E_t, A) dt < \infty,$$

Oletetaan ensin, että $-n \leq u(x) \leq n$ kaikilla $x \in A$, kiinnitetyllä $n \in \mathbb{N}$. Kiinnitetään lisäksi $h \in \mathbb{N}$. Nyt voidaan valita luvut

$$t_{j,h} \in \left(\frac{j-1}{h} - n, \frac{j}{h} - n \right), \quad \text{kun } j = 1, 2, ..., 2nh$$

siten, että

$$\frac{1}{h}\mathrm{P}(E_{t_{j,h}}, A) \leq \int_{\frac{j-1}{h}-n}^{\frac{j}{h}-n} \mathrm{P}(E_t, A)dt. \tag{5.11}$$

Määritellään funktiojono

$$u_h(x) = -n + \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2nh} \chi_{E_{t_{j,h}}}(x).$$

Tällöin

$$||Du_h||(A) = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2nh} \mathrm{P}(E_{t_{j,h}}, A). \tag{5.12}$$

Lukujen $t_{j,h}$ valinnan (yhtälö (5.11)) perusteella yhtälö (5.12) saadaan muotoon

$$||Du_h||(A) \leq \sum_{j=1}^{2nh} \int_{\frac{j-1}{h}-n}^{\frac{j}{h}-n} \mathrm{P}(E_t, A)dt = \int_{-n}^{n} \mathrm{P}(E_t, d)t.$$

Kun $n \to \infty$ pätee

$$||Du_h||(A) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E_t, A)dt < \infty, \tag{5.13}$$

joten $u_h \in BV(A)$ kaikilla $h \in \mathbb{N}$.

Näytetään seuraavaksi, että $u_h \to u$ $L^1_{loc}(A)$ mielessä. Tätä varten määritellään joukot $F_{i,h} = E_{t_{i,h}} \setminus E_{t_{i+1,h}}$. Tällöin joukot $E_{t_{j,h}}$ voidaan esittää muodossa

$$E_{t_{j,h}} = \cup_{i=j}^{2nh} F_{i,h},$$

jolloin funktiot u_h voidaan esittää muodossa

$$u_h(x) = -n + \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2nh}\sum_{i=j}^{2nh} \chi_{F_{i,h}}(x) = -n + \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{2nh} i\chi_{F_{i,h}}.$$

Tällöin pätee

$$\int_A |u - u_h| d\mu = \int_A \left| u + n - \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{2nh} i\chi_{F_{i,h}} \right| d\mu. \tag{5.14}$$

Koska joukot $F_{i,h}$ ovat pistevieraita, yhtälö (5.14) saadaan muotoon

$$\int_A |u - u_h| d\mu = \sum_{i=1}^{2nh} \int_{F_{i,h}} \left| u + n - \frac{i}{h} \right| d\mu. \tag{5.15}$$

Joukossa $F_{i,h}$ pätee

$$u < \frac{i+1}{h} - n, \quad \text{joten} \quad u + n - \frac{i}{h} < \frac{1}{h}.$$

Sijoittamalla arvio (5.16) yhtälöön (5.15) saadaan

$$\int_A |u - u_h| d\mu < \frac{1}{h}\mu(A) \to 0, \qquad \text{kun } h \to \infty,$$

eli $u_h \to u$ $L^1(A)$ mielessä. Nyt lauseen 3.3 ja yhtälön (5.13) mukaan

$$||Du||(A) \leq \liminf_{h\to\infty} ||Du_h||(A) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E_t, A) dt,$$

mikä todistaa väitteen. $\square$

Korollaari 5.1. *Jos $u \in BV(X)$, melkein kaikilla $t \in \mathbb{R}$ pätee*

$$\mathrm{P}(E_t, A) < \infty.$$

Lisäksi tällöin kaava pätee kaikille Borel-joukoille $B \subset X$.

6 Hausdorff-esitys perimetrille

Lauseessa 6.1 osoitetaan, että äärellisperimetrisen joukon perimetrille saadaan esityskaava. Kaavan avulla joukon E perimetri Borel-joukossa B voidaan esittää rajoitetun Borel-funktion integraalina joukon mittateoreettisen reunan ja joukon B leikkauksen yli kodimensiota 1 olevan Hausdorff-tyyppisen mitan suhteen.

Täten lause antaa yhteyden joukon perimetrin ja mittateoreettisen reunan mitan välille. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ lause 6.1 pätee funktiolla $\theta = 1$, jolloin joukon perimetri saadaan suoraan joukon mittateoreettisen reunan $n-1$ -ulotteisena Hausdorffin mittana, kun taas metrisessä tapauksessa funktion θ on osoitettu olevan vain rajoitettu. Lisäksi avaruudessa $\mathbb{R}^n$ kaava pätee kaikille joukoille E, mutta metrisessä avaruudessa todistus perustuu argumentteihin, jotka vaativan joukon olevan äärellisperimetrinen. Vastaavan esityskaavan mahdollinen olemassa olo ei-äärellisperimetrisille joukoille on yhä avoin ongelma.

Todistuksen kannalta keskeisiä tuloksia esitetään lemmoissa 6.1, 6.2 ja 6.3. Lemma 6.1 antaa ylärajan joukon $E \backslash B(x,\rho)$ perimetrille pallon $B(x,\rho)$ reunalla, melkein kaikilla $\rho > 0$. Tämän jälkeen lemmassa 6.2 osoitetaan perimetrimitan olevan absoluuttisesti jatkuva mitan $\mathcal{H}^h$ suhteen. Lisäksi esitetään tekninen lemma 6.3, jota tarvitaan lauseen 6.1 todistuksessa funktion θ ylärajan määrittämiseen.

Määritelmä 6.1. Olkoon funktio

$$h(B) = \frac{\mu(B)}{\mathrm{diam}(B)}, \quad \text{kaikilla Borel-joukoilla } B.$$

Määritellään Hausdorff-tyyppinen mitta funktion h avulla siten, että

$$\mathcal{H}^h_\delta(B) = \inf \left\{ \sum_{i\in I} h(B_i) \;\middle|\; B_i \text{ suljettu pallo, } \mathrm{diam}(B_i) < \delta, \text{ ja } B \subset \cup_{i\in I} B_i \right\}$$

ja

$$\mathcal{H}^h(B) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^h_\delta(B).$$

Seuraavaksi todistetaan perimetrimitalle lokaalisuusominaisuus.

Lemma 6.1. *Olkoon E äärellisperimetrinen joukko ja $x \in X$. Tällöin melkein kaikilla $\rho > 0$ pätee*

$$E \setminus B(x,\rho) \quad \textit{on äärellisperimetrinen, ja}$$
$$\mathrm{P}(E \setminus B(x,\rho), \partial B(x,\rho)) \le \frac{d}{dr}\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right)\Big|_{r=\rho}.$$

Todistus. Valitaan $\rho > 0$ siten, että funktio $t \mapsto \mu\left(B\left(x,t\right)\cap E\right)$ on differentioituva pisteessä $t = \rho$ ja $\mu(\partial B(x,\rho)) = 0$. Olkoon $\delta > 0$ ja $u \in BV(B(x,\rho+\delta))$. Lemman 3.1 perusteella on olemassa jono $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ siten, että $u_j \in Lip_{loc}(B(x,\rho+\delta))$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, $u_j \to u$ $L^1_{loc}(B(x,\rho+\delta))$ mielessä, sekä

$$||Du||(B(x,\rho+\delta)) = \lim_{j\to\infty} \int_{B(x,\rho+\delta)} g_{u_j} d\mu.$$

Kaikilla $f \in Lip_{loc}(B(x,\rho+\delta))$ pätee $fu \in BV(B(x,\rho+\delta))$. Lisäksi $fu_j \in Lip_{loc}(B(x,\rho+\delta))$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ ja $fu_j \to fu$ $L^1_{loc}(B(x,\rho+\delta))$ mielessä. Lemman 2.1 mukaisesti funktio

$$g_{fu_j} = |u_j| g_f + |f| g_{u_j}$$

on funktion fu_j 1-heikko ylägradientti, jolloin

$$||D(fu)||(B(x,\rho+\delta)) \le \liminf_{j\to\infty} \Big(\int_{B(x,\rho+\delta)} |u_j| g_f d\mu + \int_{B(x,\rho+\delta)} |f| g_{u_j} d\mu \Big). \tag{6.1}$$

Funktioiden u_j valinnan perusteella epäyhtälöstä (6.1) saadaan

$$||D(fu)||(B(x,\rho+\delta)) \le \int_{B(x,\rho+\delta)} |u| g_f d\mu + \int_{B(x,\rho+\delta)} |f| d||Du||. \tag{6.2}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Määritellään funktio

$$f_\varepsilon(y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \mathrm{d}(y,x) \ge \rho+\varepsilon, \\ \frac{\mathrm{d}(y,x)-\rho}{\varepsilon}, & \text{kun } \rho < \mathrm{d}(y,x) < \rho+\varepsilon \text{ ja} \\ 0, & \text{kun } \mathrm{d}(y,x) \le \rho. \end{cases}$$

Sijoittamalla epäyhtälöön (6.2) funktiot $u = \chi_E$ ja $f = f_\varepsilon$ saadaan epäyhtälö

$$||Df_\varepsilon \chi_E||(B(x,\rho+\delta)) \le \int_{B(x,\rho+\delta)\cap E} g_{f_\varepsilon} d\mu + \int_{B(x,\rho+\delta)} |f_\varepsilon| d||\chi_E||,$$

josta saadaan edelleen

$$||Df_\varepsilon \chi_E||(B(x,\rho+\delta)) \le \frac{1}{\varepsilon} \int_{(B(x,\rho+\delta)\setminus B(x,\rho))\cap E} 1 d\mu + \int_{B(x,\rho+\delta)} |f_\varepsilon| d||\chi_E||. \tag{6.3}$$

Epäyhtälön (6.3) oikean puolen ensimmäinen termi voidaan esittää muodossa

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{(B(x,\rho+\delta)\setminus B(x,\rho))\cap E} 1 d\mu = \frac{\mu\left(B\left(x,\rho+\varepsilon\right)\cap E\right) - \mu\left(B\left(x,\rho\right)\cap E\right)}{\varepsilon}. \tag{6.4}$$

Luvun ρ valinnan perusteella

$$\frac{\mu\left(B\left(x,\rho+\varepsilon\right)\cap E\right) - \mu\left(B\left(x,\rho\right)\cap E\right)}{\varepsilon} \to \frac{d}{dr}\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right)\Big|_{r=\rho}, \tag{6.5}$$

kun $\varepsilon \to 0$.

Toisaalta

$$f_\varepsilon \to \chi_{B(x,\rho+\delta)\setminus B(x,\rho)} \quad L^1_{loc}(B(x,\rho+\delta)) \text{ mielessä}, \tag{6.6}$$

kun $\varepsilon \to 0$, jolloin epäyhtälön (6.3) oikean puolen jälkimmäisestä termistä saadaan

$$\int_{B(x,\rho+\delta)\setminus B(x,\rho)} d||D\chi_E|| \to 0, \tag{6.7}$$

kun $\delta \to 0$. Tällöin epäyhtälöiden (6.3), (6.4), (6.5), (6.6) ja (6.7) perusteella

$$\mathrm{P}(E \setminus B(x,\rho), \partial B(x,\rho)) \leq \frac{d}{dr}\mu\left(B\left(x,r\right) \cap E\right)\Big|_{r=\rho},$$

mikä todistaa väitteen. □

Todistetaan nyt perimetrimitan absoluuttinen jatkuvuus mitan $\mathcal{H}^h$ suhteen.

Lemma 6.2. $\mathrm{P}(E,B) = 0$ *kaikilla Borel-joukoilla* $B \subset X$*, joilla* $\mathcal{H}^h(B) = 0$.

Todistus. Olkoon B Borel joukko, jolle pätee $\mathcal{H}^h(B) = 0$. Lemman 3.4 perusteella yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa, että joukko B on kompakti. Valitaan $\varepsilon > 0$. Kompaktiuden perusteella B voidaan peittää äärellisellä joukolla palloja $B(x_i^\varepsilon, r_i^\varepsilon)$, joille pätee $r_i^\varepsilon < \varepsilon$ ja

$$\sum_{i=1}^{n} h(B(x_i^\varepsilon, r_i^\varepsilon)) < \varepsilon.$$

Käyttämällä koareakaavaa (lause 5.1) funktiolle $u(y) = \mathrm{d}(y, x_i^\varepsilon)$ ja joukolle $A = B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)$ saadaan yhtälö

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(\{y \in X \mid \mathrm{d}(y, x_i^\varepsilon) > t\}, B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon))dt = ||D\,\mathrm{d}(\cdot, x_i^\varepsilon)||(B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)),$$

josta seuraa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(X \setminus B(x_i^\varepsilon, t), B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon))dt = ||D\,\mathrm{d}(\cdot, x_i^\varepsilon)||(B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)). \tag{6.8}$$

Lauseen 3.4(3) mukaan yhtälö (6.8) voidaan esittää muodossa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(B(x_i^\varepsilon, t), B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon))dt = ||D\,\mathrm{d}(\cdot, x_i^\varepsilon)||(B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)). \tag{6.9}$$

Funktio $g = 1$ on selvästi funktion $\mathrm{d}(\cdot, x_i^\varepsilon)$ heikko ylägradientti, joten epäyhtälön (6.9) oikealle puolelle saadaan arvio

$$||D\,\mathrm{d}(\cdot, x_i^\varepsilon)||(B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)) \leq \mu(B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)),$$

jolloin yhtälöstä (6.9) seuraa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(B(x_i^\varepsilon, t), B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon))dt \leq \mu(B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)). \tag{6.10}$$

Epäyhtälön (6.10) integrointialuetta voidaan vaihtaa, sillä

$$\mathrm{P}(B(x_i^\varepsilon, t), B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)) = 0, \quad \text{kun } t \notin [0, 2r_i^\varepsilon],$$

joten saadaan epäyhtälö

$$\int_{0}^{2r_i^\varepsilon} \mathrm{P}(B(x_i^\varepsilon, t), B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon))dt \leq \mu(B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)).$$

Nyt voidaan valita $\rho_i^\varepsilon \in (0, r_i^\varepsilon)$ siten, että

$$\mathrm{P}(B(x_i^\varepsilon, \rho_i^\varepsilon), B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)) \leq \frac{\mu(B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon))}{2r_i^\varepsilon},$$

jolloin mitan μ tuplaavuuden perusteella

$$\mathrm{P}(B(x_i^\varepsilon, \rho_i^\varepsilon), B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)) \leq C_D h(B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)). \tag{6.11}$$

Lauseen 3.4(4) perusteella epäyhtälöstä (6.11) saadaan

$$\mathrm{P}(B(x_i^\varepsilon, \rho_i^\varepsilon), X) \leq C_D h(B(x_i^\varepsilon, 2r_i^\varepsilon)). \tag{6.12}$$

Merkitään $A_\varepsilon = \cup_{i=1}^n B(x_i^\varepsilon, r_i^\varepsilon) \supset B$. Mitan $||Du||$ additiivisuuden perusteella pätee

$$\mathrm{P}(E \cup A_\varepsilon, X) = \mathrm{P}(E \cup A_\varepsilon, X \setminus B) + \mathrm{P}(E \cup A_\varepsilon, B). \tag{6.13}$$

Toisaalta

$$(E \cup A_\varepsilon \triangle A_\varepsilon) \cap B = (E \setminus A_\varepsilon) \cap B = \emptyset,$$

joten lauseen 3.4(1) perusteella

$$\mathrm{P}(E \cup A_\varepsilon, B) = \mathrm{P}(A_\varepsilon, B). \tag{6.14}$$

Perimetrimitan subadditiivisuuden perusteella

$$\mathrm{P}(E \cup A_\varepsilon, X \setminus B) \leq \mathrm{P}(E, X \setminus B) + \mathrm{P}(A_\varepsilon, X \setminus B). \tag{6.15}$$

Epäyhtälöiden (6.14) ja (6.15) perusteella epäyhtälö (6.13) voidaan esittää muodossa

$$\mathrm{P}(E \cup A_\varepsilon, X) \leq \mathrm{P}(E, X \setminus B) + \mathrm{P}(A_\varepsilon, X). \tag{6.16}$$

Perimetrimitan subadditiivisuuden perusteella epäyhtälön (6.16) oikean puolen jälkimmäistä termiä voidaan arvioida summalla

$$\mathrm{P}(A_\varepsilon, X) \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(B(x_i^\varepsilon, \rho_i^\varepsilon), X),$$

josta voidaan edelleen arvioida epäyhtälön (6.12) avulla

$$\mathrm{P}(A_\varepsilon, X) \leq C_D \sum_{i=1}^n h(B(x_i^\varepsilon, r_i^\varepsilon)). \tag{6.17}$$

Pallojen $B(x_i^\varepsilon, r_i^\varepsilon)$ valinnan perusteella epäyhtälöstä (6.17) saadaan

$$\mathrm{P}(A_\varepsilon, X) < C_D \varepsilon. \tag{6.18}$$

Kun $\varepsilon \to 0$, $\chi_{E \cup A_\varepsilon} \to \chi_E$ $L^1_{loc}(X)$ mielessä, jolloin lauseen 3.3 ja epäyhtälöiden (6.16) ja (6.18) perusteella

$$\mathrm{P}(E, X) \leq \mathrm{P}(E, X \setminus B), \tag{6.19}$$

joten pätee $\mathrm{P}(E, B) = 0$. $\square$

Todistetaan seuraavaksi tekninen lemma, jota käytetään lauseen 6.1 todistuksessa.

Lemma 6.3. *Olkoon* $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ *ja* $M > 1$. *Tällöin melkein kaikilla* $x \in X$ *on olemassa* $\rho = \rho_x > 0$ *siten, että jos pätee*

$$\min\{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right), \mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)\} \leq \gamma\mu(B(x,r)),$$

niin

$$\mathrm{P}(E, B(x,\rho)) \leq M\,\mathrm{P}(E\setminus B(x,\rho), \partial B(x,\rho)).$$

Todistus. Olkoon $\mathcal{G}$ kokoelma suljettuja palloja $\overline{B(x,r)}$, joille pätee

1. $\mu(\partial B(x,r)) = 0$, $\mathrm{P}(E, \partial B(x,r)) = 0$,
2. $\min\{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right), \mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)\} \leq \gamma\mu(B(x,r))$ ja
3. $\mathrm{P}(E, B(x,\rho)) > M\,\mathrm{P}(E\setminus B(x,\rho), \partial B(x,\rho))$.

Olkoon B_j niiden pisteiden $x \in X$ joukko, joilla

$$\{r \in (0, 2^{-j}) \ \mid\ \overline{B(x,r)} \in \mathcal{G}\}$$

on positiivismittainen. Merkitään $B = \cap_{j=1}^{\infty} B_j$. Tällöin B on Borel-joukko. Osoitetaan, että $\mathrm{P}(E, B) = 0$. Lemman 3.4 mukaan riittää näyttää, että $\mathrm{P}(E, K) = 0$ kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset B$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Määritellään kokoelma

$$\mathcal{F} = \{\overline{B(x,r)} \in \mathcal{G} \ \mid\ x \in K, r \in (0,\varepsilon)\}.$$

Kaikilla $\overline{B(x,r)} \in \mathcal{F}$ pätee

$$\gamma\mu(B(x,r)) \leq \min\{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right), \mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)\},$$

jolloin isoperimetrisen epäyhtälön (lause 4.1) perusteella

$$\frac{\gamma^{\frac{s-1}{s}}}{C_I}\frac{\mu(B(x,r))}{r} \leq \mathrm{P}(E, B(x,\lambda r)). \tag{6.20}$$

Koska $r \leq 2\,\mathrm{diam}(B(x,r))$ saadaan epäyhtälöstä (6.20) arvio

$$\frac{2\gamma^{\frac{s-1}{s}}}{C_I}h(B(x,r)) \leq \mathrm{P}(E, B(x,\lambda r)). \tag{6.21}$$

Vitalin peitelauseen [2, Theorem 2.1] perusteella on olemassa korkeintaan numeroituva kokoelma pistevieraita palloja

$$\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I} \subset \mathcal{F},$$

siten, että

$$\mathcal{H}^h(K \setminus \cup_{i\in I} B(x_i,r_i)) = 0.$$

Tällöin lemman 6.2 perusteella myös

$$\mathrm{P}(E, K \setminus \cup_{i \in I} B(x_i, r_i)) = 0. \tag{6.22}$$

Olkoon $A_\varepsilon = \cup_{i \in I} B(x_i, r_i)$. Tällöin

$$\mu(A_\varepsilon) = \sum_{i \in I} \mu(B(x_i, r_i)) = \sum_{i \in I} \operatorname{diam}(B(x_i, r_i)) h(B(x_i, r_i)). \tag{6.23}$$

Arvioimalla yhtälössä (6.23) $\operatorname{diam}(B(x_i, r_i)) \leq 2r_i < 2\varepsilon$ saadaan epäyhtälö

$$\mu(A_\varepsilon) < \sum_{i \in I} 2\varepsilon h(B(x_i, r_i)). \tag{6.24}$$

Nyt epäyhtälöiden (6.21) ja (6.24) perusteella pätee

$$\mu(A_\varepsilon) < \sum_{i \in I} \frac{\varepsilon C_I}{\gamma^{\frac{s-1}{s}}} \mathrm{P}(E, B(x_i, \lambda r_i)). \tag{6.25}$$

Variaatiomitan additiivisuuden perusteella epäyhtälöstä (6.25) saadaan

$$\mu(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon C_I}{\gamma^{\frac{s-1}{s}}} \mathrm{P}(E, \cup_{i \in I} B(x_i, \lambda r_i)),$$

ja variaatiomitan monotonisuuden perusteella edelleen

$$\mu(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon C_I}{\gamma^{\frac{s-1}{s}}} \mathrm{P}(E, X) \to 0, \tag{6.26}$$

kun $\varepsilon \to 0$.

Olkoon $J \subset I$ äärellinen indeksijoukko ja $A_J = \cup_{i \in J} B(x_i, r_i)$. Variaatiomitan additiivisuuden perusteella pätee

$$\mathrm{P}(E \setminus A_J, X) = \mathrm{P}(E \setminus A_J, X \setminus A_J) + \mathrm{P}(E \setminus A_J, A_J). \tag{6.27}$$

Yhtälön (6.27) oikean puolen jälkimmäinen termi häviää, ja ensimmäinen voidaan jakaa edelleen osiin, jolloin saadaan yhtälö

$$\mathrm{P}(E \setminus A_J, X) = \mathrm{P}(E \setminus A_J, X \setminus \overline{A_J}) + \mathrm{P}(E \setminus A_J, \partial A_J). \tag{6.28}$$

Lauseen 3.4(1) mukaan yhtälön (6.28) oikean puolen ensimmäinen termi saadaan, muotoon

$$\mathrm{P}(E \setminus A_J, X \setminus \overline{A_J}) = \mathrm{P}(E, X \setminus \overline{A_J}). \tag{6.29}$$

Yhtälön (6.28) oikean puolen jälkimmäinen termi voidaan variaatiomitan additiivisuuden perusteella esittää muodossa

$$\mathrm{P}(E \setminus A_J, \partial A_J) = \sum_{i \in J} \mathrm{P}(E \setminus A_J, \partial B(x_i, r_i)). \tag{6.30}$$

Joukko $E \setminus A_J$ voidaan esittää muodossa

$$E \setminus A_J = E \setminus \cup_{i \in J} B(x_i, r_i) = (E \setminus B(x_i, r_i)) \setminus \cup_{j \neq i} B(x_j, r_j),$$

jolloin lauseen 3.4(6) perustella yhtälöstä (6.30) saadaan

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \setminus A_J, \partial A_J) &= \sum_{i \in J} \big(\mathrm{P}(E \setminus B(x_i, r_i), \partial B(x_i, r_i)) \\ &+ \mathrm{P}(\cup_{j \neq i} B(x_j, r_j), \partial B(x_i, r_i)) \big). \end{aligned} \tag{6.31}$$

Koska kokoelman $\mathcal{F}$ pallot ovat pistevieraita, yhtälön (6.31) oikean puolen jälkimmäinen termi häviää. Oletuksen mukaisesti palloille $B(x_i, r_i) \in \mathcal{G}$ pätee

$$\mathrm{P}(E \setminus B(x_i, r_i), \partial B(x_i, r_i)) < \frac{1}{M} \mathrm{P}(E, B(x_i, r_i)),$$

jolloin yhtälö (6.31) saadaan muotoon

$$\mathrm{P}(E \setminus A_J, \partial A_J) < \sum_{i \in J} \frac{1}{M} \mathrm{P}(E, B(x_i, r_i)),$$

josta variaatiomitan additiivisuuden perusteella saadaan epäyhtälö

$$\mathrm{P}(E \setminus A_J, \partial A_J) < \frac{1}{M} \mathrm{P}(E, A_J). \tag{6.32}$$

Nyt yhtälön (6.28), sekä epäyhtälöiden (6.29) ja (6.32) perusteella

$$\mathrm{P}(E \setminus A_J, X) < \mathrm{P}(E, X \setminus A_J) + \frac{1}{M} \mathrm{P}(E, A_J). \tag{6.33}$$

Epäyhtälö (6.33) pätee kaikilla $J \subset I$, joilla $\mathrm{card}(J) < \aleph_0$. Kun $\mathrm{card}(J) \to \aleph_0$, saadaan epäyhtälö

$$\mathrm{P}(E \setminus A_\varepsilon, X) < \mathrm{P}(E, X \setminus A_\varepsilon) + \frac{1}{M} \mathrm{P}(E, A_\varepsilon). \tag{6.34}$$

Yhtälön (6.22) ja variaatiomitan additiivisuuden perusteella

$$\mathrm{P}(E, K) = \mathrm{P}(E, A_\varepsilon). \tag{6.35}$$

Kun $\varepsilon \to 0$, yhtälön (6.26) perusteella

$$\chi_{E \setminus A_\varepsilon} \to \chi_E \quad L^1_{loc}(X) \text{ mielessä.} \tag{6.36}$$

Nyt epäyhtälöiden (6.34), (6.35) ja (6.36), sekä lauseen (3.3) perusteella

$$\mathrm{P}(E, X) < \mathrm{P}(E, X \setminus K) + \frac{1}{M} \mathrm{P}(E, K), \tag{6.37}$$

jolloin $\mathrm{P}(E, K) = 0$, mikä todistaa väitteen. $\square$

Todistetaan lopuksi työn päätulos, jonka mukaan äärellisperimetrisen joukon perimetrille saadaan Hausdorff-tyyppinen esityslause.

Lause 6.1. *(Hausdorff-esitys perimetrille)*
Olkoon X Poincaré-avaruus ja $E \subset X$ äärelliseperimetrinen joukko. Tällöin mitta $\mathrm{P}(E,\cdot)$ *on keskittynyt joukkoon*

$$\Sigma_\gamma = \left\{ x \in X \mid \limsup_{r\to 0} \min\left\{ \frac{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right)}{\mu(B(x,r))}, \frac{\mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)}{\mu(B(x,r))} \right\} \geq \gamma \right\} \subset \partial^* E,$$

jossa $\gamma > 0$ ja riippuu ainoastaan mitan μ tuplausvakiosta C_D, Poincarén epäyhtälöön liittyvästä vakiosta λ, sekä isoperimetrisen epäyhtälön vakiosta C_I. Lisäksi $\mathcal{H}^h(\partial^* E) < \infty$ ja $\mathcal{H}^h(\partial^* E \setminus \Sigma_\gamma) = 0$. Joukon E perimetrille saadaan esityskaava

$$\mathrm{P}(E,B) = \int_{B\cap\partial^* E} \theta \, d\mathcal{H}^h \quad \textit{kaikilla Borel-joukoilla } B \subset X,$$

jollakin Borel-funktiolla $\theta : X \to [\widetilde{\gamma}, 2C_D]$, jossa $\widetilde{\gamma} > 0$ ja riippuu ainoastaan vakioista C_D, λ ja C_I. Tässä $\partial^* E$ tarkoittaa joukon E mittateoreettista reunaa, eli joukkoa

$$\left\{ x \in X \mid \limsup_{r\to 0} \min\left\{ \frac{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right)}{\mu(B(x,r))}, \frac{\mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)}{\mu(B(x,r))} \right\} > 0 \right\}.$$

Todistus. **Vaihe 1.** Näytetään, että $\mathrm{P}(E,\cdot) = 0$ joukossa $X \setminus \Sigma_\gamma$. Lemman 3.4 perusteella riittää näyttää, että $\mathrm{P}(E,K) = 0$ kaikilla kompakteilla $K \subset X \setminus \Sigma_\gamma$.

Olkoon $K \subset X \setminus \Sigma_\gamma$ kompakti. Koska mitta μ on tuplaava, pätee $\mu(K) < \infty$. Määritellään jono funktioita

$$f_r(x) = \min\left\{ \frac{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right)}{\mu(B(x,r))}, \frac{\mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)}{\mu(B(x,r))} \right\}.$$

Koska E on äärellisperimetrinen, funktioille f_r pätee isoperimetrisen epäyhtälön (lause 4.1) mukaan

$$f_r(x) \leq \left(\frac{C_I r}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}} \mathrm{P}(E, B(x,\lambda r)) \right)^{\frac{s}{s-1}} < \infty, \tag{6.38}$$

kaikilla $r > 0$. Määritellään funktiot

$$\widetilde{f}_r(x) = \sup_{\rho < r} f_\rho(x).$$

Mitan μ tuplaavuuden perusteella kaikilla $\rho < r$ pätee

$$\frac{\mu(B(x,r))}{\mu(B(x,\rho))} \leq C\left(\frac{r}{\rho}\right)^s$$

jollakin $C \geq 1$, minkä seurauksena pätee

$$\frac{\rho}{\mu(B(x,\rho))^{\frac{1}{s}}} \leq \frac{Cr}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}}. \tag{6.39}$$

Funktiot $\widetilde{f}_r$ ovat μ-mitallisia, sekä epäyhtälöiden (6.38) ja (6.39) perusteella äärellisiä kaikilla $r > 0$. Lisäksi pätee

$$\lim_{r\to 0} \widetilde{f}_r = \limsup_{r\to 0} f_r < \gamma.$$

Nyt Egoroffin lauseen [5, Theorem 4.16] perusteella $\widetilde{f}_r \to \limsup_{r\to 0} f_r < \gamma$ melkein uniformisesti joukossa K, kun $r \to 0$. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Tällöin voidaan valita $r_0 > 0$ siten, että kaikilla $r \in (0, r_0)$ pätee

$$\widetilde{f}_r < \gamma$$

joukossa K, lukuunottamatta joukkoa jonka mitta on alle ε. Nyt

$$\min\{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right), \mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)\} < \gamma\mu(B(x,r)) \tag{6.40}$$

kaikilla $r \in (0, r_0)$ joukossa K lukuunottamatta joukkoa, jonka mitta on alle ε. Määritellään funktiot

$$\begin{aligned} \underline{m}_E(x,r) &= \frac{2}{r}\int_{\frac{r}{2}}^{r} \mu\left(B\left(x,\tau\right)\cap E\right)d\tau \quad \text{ja} \\ \overline{\mu}(B(x,r)) &= \frac{1}{r}\int_{r}^{2r} \mu(B(x,\tau))d\tau. \end{aligned}$$

Koska $\mu\left(B\left(x,\tau\right)\cap E\right)$ ja $\mu(B(x,\tau))$ ovat τ suhteen ei-väheneviä, pätee

$$\underline{m}_E(x,r) \leq \mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right) \leq \underline{m}_E(x,2r) \quad \text{ja} \tag{6.41}$$

$$\mu(B(x,r)) \leq \overline{\mu}(B(x,r)) \leq \mu(B(x,2r)). \tag{6.42}$$

Oletetaan, että $\mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right) < \mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right)$. Tällöin epäyhtälöiden (6.40), (6.41) ja (6.42) mukaisesti

$$\underline{m}_{X\setminus E}(x,r) \leq \mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right) < \gamma\mu(B(x,r)) \leq \gamma\overline{\mu}(B(x,r)). \tag{6.43}$$

Toisaalta arvion (6.41) mukaan pätee

$$\mu\left(B\left(x,\frac{r}{2}\right)\right) = \mu\left(B\left(x,\frac{r}{2}\right)\cap E\right) + \mu\left(B\left(x,\frac{r}{2}\right)\setminus E\right) \leq \underline{m}_E(x,r) + \underline{m}_{X\setminus E}(x,r),$$

joten

$$\underline{m}_E(x,r) \geq \mu\left(B\left(x,\frac{r}{2}\right)\right) - \underline{m}_{X\setminus E}(x,r). \tag{6.44}$$

Käyttämällä kahdesti mitan μ tuplaavuutta, saadaan yhtälö (6.44) muotoon

$$\underline{m}_E(x,r) \geq \frac{\mu(B(x,2r)}{C_D^2} - \underline{m}_{X\setminus E}(x,r). \tag{6.45}$$

Epäyhtälöiden (6.41), (6.40) ja (6.42) mukaan

$$\underline{m}_{X\setminus E}(x,r) \leq \gamma \overline{\mu}(B(x,r)). \tag{6.46}$$

Arvioimalla epäyhtälön (6.45) ensimmäistä termiä alaspäin epäyhtälön (6.42) mukaan, ja jälkimmäistä termiä ylöspäin epäyhtälön (6.46) mukaan saadaan

$$\underline{m}_E(x,r) \geq \overline{\mu}(B(x,r)) \left(\frac{1}{C_D^2} - \gamma \right). \tag{6.47}$$

Kun γ on tarpeeksi pieni siten, että $\gamma C_D^2 \leq \frac{1}{2}$, on epäyhtälön (6.47) mukaan

$$\underline{m}_E(x,r) \geq \gamma \overline{\mu}(B(x,r)). \tag{6.48}$$

Nyt epäyhtälöiden (6.43) ja (6.48), symmetrian joukkojen E ja $X \setminus E$ välillä, sekä funktioiden $\underline{m}_E(x,r)$ ja $\overline{\mu}(B(x,r))$ jatkuvuuden r suhteen mukaan pätee joko

$$\underline{m}_{X\setminus E}(x,r) \leq \gamma \overline{\mu}(B(x,r)) \tag{6.49}$$

tai

$$\underline{m}_E(x,r) \leq \gamma \overline{\mu}(B(x,r)) \tag{6.50}$$

kaikilla $r \in (0, r_0)$.

Joukko K voidaan tarvittaessa jakaa osiin, ja tarkastella osia erikseen. Siten voidaan yleisyyttä menettämättä olettaa, että $\mu\left(B\left(x,r\right) \cap E\right) < \mu\left(B\left(x,r\right) \setminus E\right)$. Tällöin epäyhtälöiden (6.49) ja (6.42), sekä mitan tuplaavuuden perusteella pätee

$$\underline{m}_E(x,r) < \gamma C_D \mu(B(x,r)). \tag{6.51}$$

Nyt epäyhtälöiden (6.41) ja (6.51) mukaan käyttäen mitan tuplausominaisuutta uudestaan pätee

$$\mu\left(B\left(x,r\right) \cap E\right) \leq \underline{m}_E(x,2r) < \gamma C_D^2 \mu(B(x,r)) \tag{6.52}$$

kaikilla $r \in (0, \frac{r_0}{2})$.

Kiinnitetään seuraavaksi $r \in (0, \frac{r_0}{4})$. Valitaan pisteet $x_i \in K$ $(i = 1, ..., n)$, siten, että $\mathrm{d}(x_i, x_j) \geq r$, kun $i \neq j$, ja $K \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r)$. Valitaan luvut $\rho_i \in (r, 2r)$ siten, että

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^h(\partial B(x_i, \rho_i)) < \infty \quad \text{ja} \\ \mathcal{H}^h(\partial B(x_i, \rho_i) \cap \partial B(x_j, \rho_j)) = 0, \end{aligned} \tag{6.53}$$

kun $i \neq j$. Ja lisäksi

$$r \frac{d}{d\rho} \mu\left(B\left(x_j, \rho\right) \cap E\right) \Big|_{\rho = \rho_i} \leq \mu\left(B\left(x_i, 2r\right) \cap E\right). \tag{6.54}$$

Tarpeeksi pienellä γ on $\gamma C_D^2 < \frac{1}{2}$, jolloin isoperimetrisen epäyhtälön (lause 4.1) mukaan

$$\mu\left(B\left(x_i, 2r\right) \cap E\right) \leq \left(\frac{C_I 2r}{\mu(B(x_i, 2r))^{\frac{1}{s}}} \,\mathrm{P}(E, B(x_i, 2\lambda r)) \right)^{\frac{s}{s-1}} \tag{6.55}$$

Lemman 6.1 mukaan

$$\mathrm{P}(E \setminus B(x_i, \rho_i), \partial B(x_i, \rho_i)) \leq \frac{d}{d\rho} \mu \left(B\left(x_j, \rho\right) \cap E\right)\Big|_{\rho=\rho_i} \tag{6.56}$$

Arvioimalla epäyhtälöä (6.56) epäyhtälöllä (6.54) saadaan

$$\mathrm{P}(E \setminus B(x_i, \rho_i), \partial B(x_i, \rho_i)) \leq \frac{1}{r} \mu \left(B\left(x_i, 2r\right) \cap E\right). \tag{6.57}$$

Epäyhtälön (6.57) oikea puoli voidaan esittää muodossa

$$\frac{1}{r} \mu \left(B\left(x_i, 2r\right) \cap E\right) = \frac{1}{r} \mu \left(B\left(x_i, 2r\right) \cap E\right)^{\frac{1}{s}} \mu \left(B\left(x_i, 2r\right) \cap E\right)^{\frac{s-1}{s}}, \tag{6.58}$$

jolloin soveltamalla epäyhtälöä (6.52) ja isoperimetristä epäyhtälöä (lause 4.1) saadaan

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \mu \left(B\left(x_i, 2r\right) \cap E\right)^{\frac{1}{s}} \mu \left(B\left(x_i, 2r\right) \cap E\right)^{\frac{s-1}{s}} \\ &\leq \frac{1}{r} (C_D^2 \gamma \mu(B(x_i, 2r)))^{\frac{1}{s}} \frac{C_I r}{\mu(B(x_i, 2r))^{\frac{1}{s}}} \mathrm{P}(E, B(x_i, 2\lambda r)) \\ &= (C_D^2 \gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, B(x_i, 2\lambda r)). \end{aligned} \tag{6.59}$$

Tällöin yhtälön (6.58) ja epäyhtälön (6.59) mukaan pätee

$$\frac{1}{r} \mu \left(B\left(x_i, 2r\right) \cap E\right) \leq (C_D^2 \gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, B(x_i, 2\lambda r)). \tag{6.60}$$

Nyt epäyhtälöiden (6.57) ja (6.60) mukaisesti

$$\mathrm{P}(E \setminus B(x_i, \rho_i), \partial B(x_i, \rho_i)) \leq (C_D^2 \gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, B(x_i, 2\lambda r)). \tag{6.61}$$

Arvioidaan seuraavaksi pallojen $B(x_i, 2\lambda r)$ päällekkäisyyttä. Olkoon $x \in X$ ja merkitään J:llä niiden indeksien i joukkoa, joilla $x \in B(x_i, 2\lambda r)$. Pisteiden x_i valinnan perusteella $\mathrm{d}(x_i, x_j) \geq r$, kun $i \neq j$, joten pätee

$$B\left(x_i, \frac{r}{2}\right) \cap B\left(x_j, \frac{r}{2}\right) = \emptyset, \tag{6.62}$$

kun $i \neq j$. Lisäksi pätee myös

$$\bigcup_{i \in J} B\left(x_i, \frac{r}{2}\right) \subset B(x, (2\lambda + 1)r) \tag{6.63}$$

ja

$$B(x, (2\lambda + 1)r) \subset B(x_i, (4\lambda + 1)r) \tag{6.64}$$

kaikilla x_i.

Mitan tuplaavuuden perusteella on olemassa vakio $C(\lambda, C_D)$ siten, että

$$\mu(B(x_i, (4\lambda+1)r)) \leq C(\lambda, C_D)\mu\left(B\left(x_i, \frac{r}{2}\right)\right). \tag{6.65}$$

Yhtälöiden (6.63), (6.64) ja (6.65) perusteella pätee

$$\sum_{i\in J}\mu\left(B\left(x_i, \frac{r}{2}\right)\right) \leq C(\lambda, C_D)\mu\left(B\left(x_i, \frac{r}{2}\right)\right),$$

jolloin joukon J mahtavuudelle saadaan yläraja

$$\operatorname{card}(J) = \xi \leq C(\lambda, C_D).$$

Merkitään $A_r = \cup_{i=1}^n B(x_i, \rho_i)$. Lauseen 3.2(3) perusteella pätee

$$\mathrm{P}(E \setminus A_r, X) = \mathrm{P}(E \setminus A_r, X \setminus A_r) + \mathrm{P}(E \setminus A_r, X \cap A_r). \tag{6.66}$$

Yhtälön (6.66) oikean puolen jälkimmäinen termi häviää, ja ensimmäinen termi voidaan lauseen 3.2(3) mukaan jakaa osiin

$$\mathrm{P}(E \setminus A_r, X \setminus A_r) = \mathrm{P}(E \setminus \overline{A}_r, X \setminus A_r) + \mathrm{P}(E \setminus A_r, \partial A_r). \tag{6.67}$$

Lauseen 3.4(1) mukaan

$$\mathrm{P}(E \setminus \overline{A}_r, X \setminus A_r) = \mathrm{P}(E, X \setminus A_r). \tag{6.68}$$

Pisteiden x_i valinnan perusteella $K \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r)$, joten lauseen 3.2(4) mukaan

$$\mathrm{P}(E, X \setminus A_r) \leq \mathrm{P}(E, X \setminus K). \tag{6.69}$$

Yhtälön (6.67) oikean puolen jälkimmäistä termiä voidaan arvioida mitan $||Du||$ monotonisuuden ja subadditiivisuuden (lause 3.5) perusteella ylöspäin, sillä $\partial A_r \subset \cup_{i=1}^n \partial B(x_i, \rho_i)$, jolloin

$$\mathrm{P}(E \setminus A_r, \partial A_r) \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{P}(E \setminus A_r, \partial B(x_i, \rho_i)). \tag{6.70}$$

Joukko $E \setminus A_r$ voidaan esittää muodossa

$$E \setminus A_r = E \setminus \cup_{i=1}^n B(x_i, \rho_i) = (E \setminus B(x_i, \rho_i)) \setminus \cup_{j\neq i} B(x_j, \rho_j). \tag{6.71}$$

Tällöin lauseen 3.4(6) ja yhtälön (6.71) perusteella pätee

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E \setminus A_r, \partial B(x_i, \rho_i)) \leq\ & \mathrm{P}(E \setminus B(x_i, \rho_i), \partial B(x_i, \rho_i)) \\ & + \mathrm{P}(\cup_{j\neq i} B(x_j, \rho_j), \partial B(x_i, \rho_i)).\end{aligned} \tag{6.72}$$

Epäyhtälöiden (6.70) ja (6.72) mukaan pätee

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E \setminus A_r, \partial A_r) \;\le\; & \sum_{i=1}^{n} \Big(\mathrm{P}(E \setminus B(x_i,\rho_i), \partial B(x_i,\rho_i)) \\ & + \; \mathrm{P}(\cup_{j\neq i} B(x_j,\rho_j), \partial B(x_i,\rho_i)) \Big). \end{aligned} \tag{6.73}$$

Lauseen 3.4(5) ja yhtälön (6.53) mukaan

$$\mathrm{P}(\cup_{j\neq i} B(x_j,\rho_j), \partial B(x_i,\rho_i)) \le \sum_{j\neq i} \mathrm{P}(B(x_j,\rho_j), \partial B(x_i,\rho_i)) = 0. \tag{6.74}$$

Nyt arvioimalla epäyhtälön (6.73) oikean puolen ensimmäistä termiä epäyhtälöllä (6.61) ja toista termiä epäyhtälöllä (6.74) saadaan

$$\mathrm{P}(E \setminus A_r, \partial A_r) \le \sum_{i=1}^{n} (C_D^2\gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, B(x_i, 2\lambda r)). \tag{6.75}$$

Huomioimalla pallojen $B(x_i, 2\lambda r)$ päällekkäisyys saadaan epäyhtälöstä (6.75) arvio

$$\mathrm{P}(E \setminus A_r, \partial A_r) \le \xi (C_D^2\gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, \cup_{i=1}^{n} B(x_i, 2\lambda r)). \tag{6.76}$$

Nyt yhtälön (6.67) ja epäyhtälöiden (6.69) ja (6.76) perusteella pätee

$$\mathrm{P}(E \setminus A_r, X) \le \mathrm{P}(E, X \setminus K) + \xi (C_D^2\gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, \cup_{i=1}^{n} B(x_i, 2\lambda r)). \tag{6.77}$$

Säteet ρ_i valittiin siten, että $\rho_i < 2r$ kaikilla $i = 1, ..., n$, joten joukko A_r sisältyy joukon K $2r$-ympäristöön. Tällöin mitan μ monotonisuuden ja subadditiivisuuden perusteella pätee

$$\mu(E \cap A_r) \le \mu(E \cap \cup_{i=1}^{n} B(x_i, 2r)) \le \sum_{i=1}^{n} \mu\left(B\left(x_i, 2r\right) \cap E\right). \tag{6.78}$$

Epäyhtälön (6.60) mukaan epäyhtälöstä (6.78) saadaan arvio

$$\mu(E \cap A_r) \le \sum_{i=1}^{n} r (C_D^2\gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, B(x_i, 2\lambda r)).$$

Huomioimalla pallojen $B(x_i, 2\lambda r)$ päällekkäisyys päästään arvioon

$$\mu(E \cap A_r) \le r\xi (C_D^2\gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, \cup_{i=1}^{n} B(x_i, 2\lambda r)). \tag{6.79}$$

Nyt epäyhtälön (6.79) ja lauseen 3.2(4) perusteella pätee

$$\mu(E \cap A_r) \le r\xi (C_D^2\gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, X). \tag{6.80}$$

Koska joukko E on äärellisperimetrinen, epäyhtälön (6.80) perusteella pätee

$$\mu(E \cap A_r) \to 0, \quad \text{kun } r \to 0. \tag{6.81}$$

Perimetrimitan subadditiivisuuden (lause 3.4(5)) perusteella pätee

$$\mathrm{P}(E, X) \leq \mathrm{P}(E \cap A_r, X) + \mathrm{P}(E \setminus A_r, X). \tag{6.82}$$

Soveltamalla epäyhtälöä (6.77) epäyhtälöön (6.82) saadaan arvio

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E, X) &\leq \mathrm{P}(E \cap A_r, X) + \mathrm{P}(E, X \setminus K) \\ &+ \xi(C_D^2 \gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, \cup_{i=1}^n B(x_i, 2\lambda r)). \end{aligned} \tag{6.83}$$

Kun $r \to 0$, epäyhtälö (6.83) saadaan muotoon

$$\mathrm{P}(E, X) \leq \mathrm{P}(E, X \setminus K) + \xi(C_D^2 \gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, K). \tag{6.84}$$

Toisaalta mitan $||Du||$ additiivisuuden pistevieraille joukoille (Lause 3.2(3)) mukaan

$$\mathrm{P}(E, X) = \mathrm{P}(E, X \setminus K) + \mathrm{P}(E, K). \tag{6.85}$$

Tällöin yhtälöstä (6.85) ja epäyhtälöstä (6.84) saadaan epäyhtälö

$$\mathrm{P}(E, K) \leq \xi(C_D^2 \gamma)^{\frac{1}{s}} C_I \, \mathrm{P}(E, K),$$

jolloin kun γ on tarpeeksi pieni, että $\xi(C_D^2 \gamma)^{\frac{1}{s}} C_I < 1$, on oltava

$$\mathrm{P}(E, K) = 0.$$

Tällöin siis $\mathrm{P}(E, \cdot) = 0$ joukossa $\partial^* E \setminus \Sigma_\gamma$.

Vaihe 2. Näytetään, että joukossa Σ_γ saadaan perimetrimitalle esityskaava

$$\mathrm{P}(E, B) = \int_{B \cap \Sigma_\gamma} \theta d\mathcal{H}^h, \tag{6.86}$$

kaikilla Borel-joukoilla B ja jollakin Borel-funktiolla $\theta : X \to [\widetilde{\gamma}, 2C_D]$.

Mitan μ tuplaavuuden perusteella on olemassa vakio $C(\lambda, C_D)$ siten, että

$$\mu(B(x, \lambda r)) \leq C(\lambda, C_D) \mu(B(x, r)). \tag{6.87}$$

Isoperimetrisen epäyhtälön perusteella pätee

$$\min\{\mu(B(x,r) \cap E), \mu(B(x,r) \setminus E)\} \leq \Big(\frac{C_I r}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}} \, \mathrm{P}(E, B(x, \lambda r)) \Big)^{\frac{s}{s-1}},$$

jolloin joukossa Σ_γ pätee

$$\limsup_{r\to 0}\Big(\frac{C_I r}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}}\,\mathrm{P}(E,B(x,\lambda r))\Big)^{\frac{s}{s-1}}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\geq\gamma. \tag{6.88}$$

Epäyhtälö (6.88) saadaan muotoon

$$\limsup_{r\to 0}\frac{r}{\mu(B(x,r))}\,\mathrm{P}(E,B(x,\lambda r))\geq\frac{\gamma^{\frac{s-1}{s}}}{C_I}. \tag{6.89}$$

Arvioimalla pallon $B(x,r)$ mittaa alaspäin epäyhtälöllä (6.87) saadaan epäyhtälöstä (6.89)

$$\limsup_{r\to 0}\frac{r}{\mu(B(x,\lambda r))}\,\mathrm{P}(E,B(x,\lambda r))\geq\frac{\gamma^{\frac{s-1}{s}}C(\lambda,C_D)}{C_I}. \tag{6.90}$$

Koska $r\leq\lambda r\leq\lambda\,\mathrm{diam}(B(x,\lambda r))$, pätee epäyhtälön (6.90) perusteella

$$\limsup_{r\to 0}\frac{\mathrm{P}(E,B(x,\lambda r))}{h(B(x,\lambda r))}\geq\frac{\gamma^{\frac{s-1}{s}}C(\lambda,C_D)}{C_I}. \tag{6.91}$$

Tällöin epäyhtälön (6.91) ja Vitalin peitelauseen korollaarin [2, (2.6)] perusteella pätee

$$\mathrm{P}(E,B)\geq\frac{\gamma^{\frac{s-1}{s}}C(\lambda,C_D)}{C_I}\mathcal{H}^h(B) \tag{6.92}$$

kaikilla Borel-joukoilla $B\subset\Sigma_\gamma$. Toisaalta Vitalin peitelauseen korollaarin [2, (2.7)] perusteella pätee myös

$$\limsup_{r\to 0}\frac{\mathrm{P}(E,B(x,r))}{h(B(x,r))}<\infty \tag{6.93}$$

$\mathcal{H}^h$ -melkein kaikilla $x\in\Sigma_\gamma$. Epäyhtälöiden (6.92) ja (6.93) perusteella pätee

$$\widetilde{\gamma}\leq D_{\mathcal{H}^h}\,\mathrm{P}(E,\cdot)<\infty, \tag{6.94}$$

jossa

$$\widetilde{\gamma}=\frac{\gamma^{\frac{s-1}{s}}C(\lambda,C_D)}{C_I}.$$

Näytetään vielä, että funktiolle $D_{\mathcal{H}^h}\,\mathrm{P}(E,\cdot)$ saadaan yläraja. Lauseen 3.4(3) perusteella pätee

$$2\,\mathrm{P}(E,B(x,r))=\mathrm{P}(E,B(x,r))+\mathrm{P}(X\setminus E,B(x,r)). \tag{6.95}$$

Lemman 6.3 mukaan joukossa Σ_γ pätee

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E,B(x,r))+\mathrm{P}(X\setminus E,B(x,r)) &\leq M\,\mathrm{P}(E\setminus B(x,r),\partial B(x,r))\\ &+ M\,\mathrm{P}((X\setminus E)\setminus B(x,r),\partial B(x,r))\end{aligned} \tag{6.96}$$

melkein kaikilla $r \in (0, r_x)$. Nyt lemman 6.1 perusteella epäyhtälöstä (6.96) saadaan

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E, B(x,r)) + \mathrm{P}(X \setminus E, B(x,r)) &\leq M\frac{d}{dr}(\mu\,(B\,(x,r) \cap E) + \mu\,(B\,(x,r) \setminus E)) \\ &= M\frac{d}{dr}\mu(B(x,r)). \end{aligned} \tag{6.97}$$

Epäyhtälöiden (6.95) ja (6.97) perusteella pätee

$$\mathrm{P}(E, B(x,r)) \leq M\frac{d}{dr}\mu(B(x,r)) \tag{6.98}$$

melkein kaikilla $r \in (0, r_x)$.

Koska $\mathrm{P}(E, B(x,r))$ on r suhteen ei-vähenevä, pätee

$$\mathrm{P}(E, B(x,r)) \leq \frac{1}{r}\int_r^{2r} \mathrm{P}(E, B(x,r))dr. \tag{6.99}$$

Soveltamalla epäyhtälöä (6.98) epäyhtälöön (6.99) saadaan

$$\mathrm{P}(E, B(x,r)) \leq \frac{M}{r}\int_r^{2r} \frac{d}{dr}\mu(B(x,r))dr,$$

jolloin pätee

$$\mathrm{P}(E, B(x,r)) \leq \frac{M}{r}\mu(B(x,2r)). \tag{6.100}$$

Käyttämällä mitan tuplausominaisuutta epäyhtälöön (6.100) saadaan

$$\mathrm{P}(E, B(x,r)) \leq \frac{MC_D}{r}\mu(B(x,r)). \tag{6.101}$$

Palloille $B(x,r)$ pätee $\mathrm{diam}(B(x,r)) \leq 2r$, jolloin funktion h määritelmän perusteella epäyhtälöstä (6.101) saadaan

$$\mathrm{P}(E, B(x,r)) \leq 2MC_D h(B(x,r)). \tag{6.102}$$

Epäyhtälö (6.102) pätee melkein kaikilla $r \in (0, r_x)$, jolloin pätee myös

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{P}(E, B(x,r))}{h(B(x,r))} \leq 2MC_D. \tag{6.103}$$

Koska epäyhtälö (6.103) pätee kaikilla $M > 1$, pätee

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{P}(E, B(x,r))}{h(B(x,r))} \leq 2C_D, \tag{6.104}$$

kun $M \to 1$. Nyt epäyhtälöiden (6.94) ja (6.104) mukaan pätee

$$\widetilde{\gamma} \leq D_{\mathcal{H}^h}\,\mathrm{P}(E, \cdot) < 2C_D. \tag{6.105}$$

Koska lemman 6.2 mukaan $\mathrm{P}(E,\cdot) \ll \mathcal{H}^h$, Radon-Nikodymin lauseen [5, Theorem 5.29] ja epäyhtälön (6.105) perusteella pätee

$$\mathrm{P}(E,B) = \int_{B\cap\Sigma_\gamma} \theta d\mathcal{H}^h$$

kaikilla Borel-joukoilla B ja jollakin Borel-funktiolla $\theta : X \to [\widetilde{\gamma}, 2C_D]$.

Vaihe 3. Näytetään, että $\mathcal{H}^h(\partial^* E \setminus \Sigma_\gamma) = 0$.

Oletuksen mukaan X on Poincaré-avaruus, joten se on yhtenäinen. Tällöin $\operatorname{diam}(B(x,r)) \geq r$, kun $r < \frac{\operatorname{diam}(X)}{2}$.

Kaikilla Borel-joukoilla $B \subset \partial^* E \setminus \Sigma_\gamma$ pätee $\mathrm{P}(E,B) = 0$, joten kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee

$$\mathrm{P}(E,B) < \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{H}^h(B).$$

Nyt Vitalin peitelauseen korollaarin [2, (2.6)] mukaan pätee

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{P}(E,B(x,r))}{h(B(x,r))} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\mathcal{H}^h$ -melkein kaikilla $x \in \partial^* E \setminus \Sigma_\gamma$. Tällöin voidaan valita $r_0 > 0$ siten, että kaikilla $r \in (0, r_0)$ pätee

$$\mathrm{P}(E,B(x,r)) < \varepsilon h(B(x,r)). \tag{6.106}$$

Isoperimetrisen epäyhtälön (lause 4.1) mukaan

$$\min\{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right),\mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)\} < \left(\frac{C_I r}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}}\,\mathrm{P}(E,B(x,\lambda r))\right)^{\frac{s}{s-1}}. \tag{6.107}$$

Kun $r < r_0$ epäyhtälöiden (6.106) ja (6.107) mukaan

$$\min\{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right),\mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)\} < \left(\varepsilon\frac{C_I r}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}} h(B(x,\lambda r))\right)^{\frac{s}{s-1}}. \tag{6.108}$$

Arvioimalla epäyhtälössä (6.108) $r \leq \operatorname{diam}(B(x,r)) \leq \operatorname{diam}(B(x,\lambda r))$ saadaan epäyhtälö

$$\min\{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right),\mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)\} < \left(\varepsilon\frac{C_I \operatorname{diam}(B(x,\lambda r))}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}} h(B(x,\lambda r))\right)^{\frac{s}{s-1}},$$

jolloin funktion h määritelmän mukaan

$$\min\{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right),\mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)\} < \left(\varepsilon\frac{C_I \mu(B(x,\lambda r))}{\mu(B(x,r))^{\frac{1}{s}}}\right)^{\frac{s}{s-1}}. \tag{6.109}$$

Mitan μ tuplaavuuden perusteella on olemassa vakio $C(\lambda, C_D)$ siten, että $\mu(B(x,\lambda r)) \leq C(\lambda, C_D)\mu(B(x,r))$, jolloin epäyhtälöstä (6.109) saadaan

$$\min\{\mu\left(B\left(x,r\right)\cap E\right),\mu\left(B\left(x,r\right)\setminus E\right)\} < \Big(\varepsilon C_I C(\lambda, C_D)\Big)^{\frac{s}{s-1}} \mu(B(x,r)). \tag{6.110}$$

Nyt yhtälöiden (6.41) ja (6.42) mukaan pätee

$$\min\{\underline{m}_E(x,r), \underline{m}_{X\setminus E}(x,r)\} < \Big(\varepsilon C_I C(\lambda, C_D)\Big)^{\frac{s}{s-1}} \overline{\mu}(B(x,r)). \tag{6.111}$$

Funktioiden $\underline{m}_E(x,r)$, $\underline{m}_{X\setminus E}(x,r)$ ja $\overline{\mu}(B(x,r))$ jatkuvuuden r suhteen, ja epäyhtälön (6.111) mukaan joko

$$\underline{m}_E(x,r) < \Big(\varepsilon C_I C(\lambda, C_D)\Big)^{\frac{s}{s-1}} \overline{\mu}(B(x,r))$$

tai

$$\underline{m}_{X\setminus E}(x,r) < \Big(\varepsilon C_I C(\lambda, C_D)\Big)^{\frac{s}{s-1}} \overline{\mu}(B(x,r)).$$

Yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa, että $\underline{m}_E(x,r) < \underline{m}_{X\setminus E}(x,r)$, kun $r \in (0, r_0)$. Tällöin epäyhtälön (6.41) mukaan pätee

$$\mu\left(B\left(x,r\right) \cap E\right) \leq \underline{m}_E(x,2r) < \Big(\varepsilon C_I C(\lambda, C_D)\Big)^{\frac{s}{s-1}} \overline{\mu}(B(x,2r)) \tag{6.112}$$

kaikilla $r \in (0, \frac{r_0}{2})$. Mitan tuplaavuuden ja epäyhtälön (6.42) perusteella epäyhtälöstä (6.112) saadaan

$$\mu\left(B\left(x,r\right) \cap E\right) \leq \Big(\varepsilon C_I C(\lambda, C_D)\Big)^{\frac{s}{s-1}} C_D^2 \mu(B(x,r)). \tag{6.113}$$

Tällöin epäyhtälön (6.113) mukaan pätee

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu\left(B\left(x,r\right) \cap E\right)}{\mu(B(x,r))} < \Big(\varepsilon C_I C(\lambda, C_D)\Big)^{\frac{s}{s-1}} C_D^2 \to 0,$$

kun $\varepsilon \to 0$. Täten $x \notin \partial^* E \quad \mathcal{H}^h$ -melkein kaikilla $x \in \partial^* E \setminus \Sigma_\gamma$.

$\square$

Viitteet

[1] Ambrosio, L., *Some Fine Properties of Sets of Finite Perimeter in Ahlfors Regular Metric Measure Spaces.* Adv. Math. **159** (2001), 51-67

[2] Ambrosio, L., *Fine Properties of Sets of Finite Perimeter in Doubling Metric Measure Spaces.* Set- Valued Anal., **10,** (2002), 111-128

[3] Ambrosio, L., Miranda, M., Jr., Pallara, D., *Special functions of bounded variation in doubling metric measure spaces.* Calculus of variations: topics from the mathematical heritage of E. De Giorgi, 1-45, Quad. Mat., 14, Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 2004

[4] Björn, A., Björn J., *Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces.*

[5] Bruckner B., Bruckner M., Thomson S., *Real Analysis.* Second edition, 2008

[6] Camfield, C., *Comparison of BV Norms in Weighted Euclidean Spaces and Metric Measure Spaces.* 2008

[7] Evans L.C., Gariepy R.F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, Inc. 1992

[8] Hajlasz, P., Koskela, P., *Sobolev met Poincaré.* Mem. Amer. Math. Soc. 145 (2000), no. 688, x+101 pp.

[9] Heikkilä A., *Functions of bounded variation on metric spaces.* 2010

[10] Miranda, M., Jr, *Functions of bounded variation on "good" metric measure spaces.* J. Math. Pures Appl., **82,** (2003), 975-1004