Teknillinen korkeakoulu
Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto
Matematiikan laitos

Diplomityö

BMO-funktioiden karakterisaatioita

Outi Elina Maasalo

Valvoja: Olavi Nevanlinna
Ohjaaja: Juha Kinnunen

Espoo
31. elokuuta, 2004

Teknillinen Korkeakoulu — Tiivistelmä

Teknillisen Fysiikan ja Matematiikan Osasto

Tekijä:	Outi Elina Maasalo
Osasto:	Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto
Pääaine:	Matematiikka
Sivuaine:	Mekaniikka
Otsikko:	BMO-funktioiden karakterisaatioita
Title in English:	Characterisations of BMO
Professuuri:	Mat-1 Matematiikka
Valvoja:	Professori Olavi Nevanlinna
Ohjaaja:	Professori Juha Kinnunen (Oulun yliopisto)

Tässä työssä tarkastelemme keskimääräiseltä heilunnaltaan rajoitettuja eli Bounded Mean Oscillation -funktioita metrisissä mitta-avaruuksissa. Keskitymme erityisesti BMO-funktioiden karakterisaatiolauseisiin käytettävän mitan ollessa tuplaava. Työn päätulokset ovat John-Nirenbergin lemma ja Coifman-Rochbergin lause. Keskeisenä ideana on osoittaa analyysin perusteemojen olevan riippumattomia avaruuden $\mathbb{R}^n$ lineaarisesta rakenteesta. Usein tämä tehdään hyödyntämällä vektoriavaruuden ominaisuuksien sijaan maksimaalifunktiotekniikoita ja Vitali-tyyppisiä peitelauseita.

Kaikki tulokset ovat n-ulotteisten reaaliavaruuksien tapauksessa tunnettuja ja suurelta osin yleistys metriseen avaruuteen on vaivatonta. Päätulosten osalta tilanne on monimutkaisempi. John-Nirenbergin lemman todistus on Mateaun, Mattilan, Nicolaun ja Orobitgin mukainen [14]. Coifman-Rochbergin lauseen todistamme yleistämällä Garcia-Cuervan ja Rubio de Francian version metriseen avaruuteen [6]. Esitämme myös käänteiselle Hölderin epäyhtälölle metrisen avaruuden perinteestä poikkeavan todistuksen yleistämällä Coifmanin ja Feffermanin $\mathbb{R}^n$-todistuksen [2]. Tätä varten todistamme Calderón-Zygmundin hajotelmasta parannetun version palloille.

Pääasiallisina lähteinä on käytetty reaalivaruuksien analyysiä käsitteleviä teoksia kuten Javier Duoandikoetxean Fourier Analysis [4] ja Elias M. Steinin Harmonic Analysis [18] sekä useita BMO-funktioita käsitteleviä ajankohtaisia artikkeleita. Metrisen avaruuden analyysiin on haettu ajatuksia Juha Heinosen kirjasta Lectures on Analysis on Metric Spaces [8]. Oletamme lukijalta perustiedot metrisistä avaruuksista sekä mitta- ja integrointiteoriasta.

Avainsanat:	BMO, metrinen avaruus, tuplaava mitta, John-Nirenbergin lemma, Coifman-Rochbergin lause, Muckenhouptin painot, käänteinen Hölderin epäyhtälö
Sivumäärä:	55

Täytetään osastolla

Hyväksytty: **Kirjasto:**

Author: Outi Elina Maasalo

Department: Department of Engineering Physics and Mathematics
Major subject: Mathematics
Minor subject: Mechanics

Title: Characterisations of BMO
Title in Finnish: BMO-funktioiden karakterisaatioita

Professor: Mat-1 Mathematics
Supervisor: Professor Olavi Nevanlinna
Instructor: Professor Juha Kinnunen (University of Oulu)

In this Master's Thesis we consider functions of Bounded Mean Oscillation in metric measure spaces. We concentrate on two characterisation theorems when the underlying measure is doubling. The John-Nirenberg lemma and the Coifman-Rochberg theorem are our main interests. We intend to show that the essential features of the presented BMO-theory are independent of the linear structure of $\mathbb{R}^n$. We proceed mainly by using maximal functions with Vitali-type covering theorems.

This work does not contain new results. It is often straightforward to generalize the familiar results in $\mathbb{R}^n$ to a metric space. However the main results are an exception. In the proof of the John-Nirenberg lemma we follow the presentation of Mateau, Mattila, Nicolau and Orobitg [14]. We prove the Coifman-Rochberg theorem by generalizing the work of Garcia-Cuerva and Rubio de Francia [6]. Our approach to the reverse Hölder inequality is also different from the metric space tradition. We present an improved Calderón-Zygmund theorem for balls and generalise the proof in $\mathbb{R}^n$ presented by Coifman and Fefferman [2].

The thesis is loosely based on Javier Duoandikoetxea's Fourier Analysis [4], Elias M. Stein's Harmonic Analysis [18] and Juha Heinonen's Lectures on Analysis on Metric Spaces [8] as well as recent articles of BMO. The reader is assumed to be familiar with the basic concepts of metric spaces and also of measure and integral theory.

Keywords: BMO, metric space, doubling measure, John-Nirenberg lemma, Coifman-Rochberg theorem, Muckenhoupt weigths, reverse Hölder inequality
Number of pages: 55

Departent fills

Approved: **Library code:**

Esipuhe

Matemaattinen analyysi alkoi todella kiehtoa minua vasta viettäessäni yhden opiskeluvuosistani Pariisissa. Tähän vaikuttivat varmasti niin analyysin historian mielenkiintoiset ja intensiiviset opinnot kuin myös mahdollisuus kokonaisen vuoden ajan keskittyä ainoastaan analyysin tietojeni syventämiseen ja laajentamiseen. Haluan kiittää työni valvojaa professori Olavi Nevanlinnaa häneltä Ranskaan lähtiessäni saamastani avusta ja yhteistyöstämme palattuani Suomeen.

Työni ohjaaja Juha Kinnunen on ollut tärkeä innoittajani ja erinomainen opettaja. Hänellä on kyky löytää aidosti mielenkiintoisia matemaattisia kysymyksiä uskomattoman monista paikoista ja vielä auttaa ratkaisujen etsimisessä.

Kiitos perheelleni ja ystävilleni pitkistä illoista, kiitos Valterille hitaista aamuista.

Otaniemessä 31. elokuuta 2004

Outi Elina Maasalo

Sisällys

Luku 1

Johdanto

Metrinen avaruus on valloittava keksintö. Se pakottaa meidät luopumaan ajatuksesta, että avaruus olisi aina jotain konkreettista; se estää meitä soveltamasta matematiikkaan käsityksiämme kolmiulotteisesta maailmasta, jossa elämme. Saamme pitää ainoastaan intuitiomme etäisyydestä, ja sekin johdattaa usein harhaan. Nimittäin samalla kun arkinen etäisyyskäsityksemme on euklidinen, etäisyyden perusaksioomat toteuttaa myös metriikka, jossa kahden eri pisteen etäisyys on yksi ja muutoin etäisyys on nolla.

Muutamia vuosia Lebesguen integrointiteorian syntymisen jälkeen ranskalainen Maurice Fréchet esitteli väitöskirjassaan vuonna 1906 metrisen avaruuden käsitteen. Siirtyminen reaaliavaruudesta abstrakteille avaruuksille avasi valtavasti polkuja uusille matemaattisille tutkimusmatkoille. Vaikka aluksi tuntuisikin, että esimerkiksi vektoriavaruuden ominaisuuksista luovuttaessa menetetään niin paljon työkaluja, että jäljelle jäänyt avaruus on hyödytön, lähempi tarkastelu paljastaa metrisen avaruuden mitä monipuolisimmaksi ja kiinnostavimmaksi matemaatikon leikkikentäksi. Metrisen avaruuden analyysi antaa mahdollisuuden pureutua analyysin ilmiöiden olennaisiin kohtiin ja ottaa erityisen tarkastelun kohteeksi asiat, jotka eivät riipu kunkin avaruuden erityisominaisuuksista. Saamme tilaisuuden pohtia ilmiöitä irrallaan geometriasta. Tämän vuoksi on jännittävää tarkastella analyysiä perinteisen $\mathbb{R}^n$:n sijaan metrisen avaruuden tapauksessa. Tässä työssä tutkimuksen kohteena ovat keskimääräiseltä heilunnaltaan rajoitetut eli BMO-funktiot. Lyhenne BMO tulee sanoista *Bounded Mean Oscillation*.

BMO-funktioiden juuret ovat mekaniikassa. Alkujaan saksalainen, sittemmin Yhdysvalloissa vaikuttanut matematiikko Fritz John julkaisi 1961 artikkelin Rotation and Strain [10], jossa hän tutki muodonmuutosten analyyttisiä ja geometrisia ominaisuuksia. On helppo osoittaa, että kappaleen muodonmuutoskuvaus on mahdollista kirjoittaa ortogonaalisen rotaatiotensorin ja symmetrisen positiividefiniitin venytystensorin tulona. John tarkasteli erityisesti muodonmuutoksia, joiden venytys, *strain*, on jollain tavalla pieni. Hän halusi artikkelissaan approksimoida muodonmuutosta avaruudessa L^∞ jäykällä muodonmuutoksella ja lisäksi osoittaa, että avaruudessa L^p, $(p < +\infty)$, rotaatiomatriisia voidaan approksimoida ortogonaalisella vakiotensorilla. Todistaessaan jälkimmäistä väitettään John esitteli BMO-ehdon, jonka tutkittavan muodonmuutoksen muodonmuutosgradientti toteutti.

BMO-ehdon toteuttavat funktiot osoittautuivat pian hyödyllisiksi useilla matematiikan aloilla. Niitä ryhdyttiin hyödyntämään niin harmonisessa analyysissä kuin osittaisdifferentiaaliyhtälöiden, konformi- ja kvasikonformikuvausten ja martingaalien teoriassakin. Samana vuonna 1961 John julkaisi yhdessä Louis Nirenbergin kanssa artikkelin On Functions of Bounded Mean Oscillation [11], jossa he muun muassa todistivat BMO-funktiot karakterisoivan John-Nirenbergin lemman. Seuraava merkittävä edistysaskel BMO-funktioiden teoriassa otettiin 1966 ja 1967, kun Spanne, Peetre ja Stein osoittivat että singulaariset integraalioperaattorit kuvaavat avaruuden L^∞ BMO:lle. Vuonna 1971 Fefferman esitti, että BMO on Hardyn avaruuden H^1 duaali, minkä Fefferman ja Stein todistivat 1972. Nämä tulokset ovat merkittaviä useista syistä. H^1:n toimiessa usein avaruuden L^1 luonnollisena korvikkeena BMO sai saman tehtävän L^∞:n suhteen.

Sovelluksista ja viitteistä kiinnostuneiden kannattaa tutustua Steinin kirjaan [18] tai Johnin koottuihin julkaisuihin [15]. Tämän työn tarkoituksena ei ole BMO-funktioiden käyttötarkoitusten tutkiminen, vaan ajatuksenamme on pysähtyä hetkeksi BMO-määritelmään. Mitä BMO-funktiot oikein ovat? Millaisia karakterisaatioita niille löytyy metrisessä avaruudessa? Millä tavalla metrisen avaruuden BMO-funktiot mahdollisesti eroavat reaaliavaruuden BMO-funktioista?

Metrisen avaruuden analyysissä tehdään perinteisesti kaksi standardioletusta: käytettävä mitta on tuplaava, eli samankeskisten pallojen mitat ovat verrannollisia keskenään, ja lisäksi avaruus toteuttaa jonkinlaisen Poincarén epäyhtälön. Jälkimmäinen oletus vaatii tietenkin derivaatan määritelmän, eikä näin ollen kiinnosta meitä tässä työssä. Molempia oletuksia voisi kuitenkin toistaiseksi kutsua valistuneiksi arvauksiksi. Ehdot ovat epätriviaaleja ja vahvoja, sillä ne tuovat mukanaan paljon erilaisia työkaluja. Ne auttavat rajaamaan tutkittavien avaruuksien joukosta toivottomimmat tapaukset pois, mutta niiden lopullista merkitystä ei vielä tiedetä. Liian rajoittavia oletukset eivät kuitenkaan ole, sillä ehdot toteuttavia avaruuksia on paljon. Stephen Keithin artikkelista A differentiable structure for metric measure spaces löytyy hyviä esimerkkejä [12]. Yksi tämän työn tavoitteista on etsiä ja tarkastella BMO-funktioiden teoriasta kohtia, joissa mitan tuplaavuudella on keskeinen osa.

Aluksi esittelemme tarvittavia työkaluja tuplaavissa mitta-avaruuksissa luvussa 2. Näistä tärkeimpiä ovat Vitalin peitelause ja erilaiset maksimaalifunktioepäyhtälöt. Luvussa 3 todistamme BMO-funktioille joitakin perustuloksia ja osoitamme muun muassa, että BMO-funktiot muodostavat Banachin avaruuden. Luvussa 4 esittelemme ja todistamme metrisessä avaruudessa ensimmäisen työn päätuloksista eli John-Nirenbergin lemman. Ennen kuin voimme todistaa toisen päätuloksen, Coifman-Rochbergin lauseen, meidän on tutustuttava Muckenhouptin painofunktioihin ja painotettuihin integraaleihin. Nämä muodostavat merkittävän osan työssä käsiteltävästä BMO-teoriasta. Luvussa 5 keskitymmekin esittelemään muutamia painojen perusominaisuuksia ja lisäksi luvussa 7 tarvittavia työkaluja. Luku 6 on omistettu käänteiselle Hölderin epäyhtälölle, joka on Muckenhouptin painojen ja sitä kautta Coifman-Rochbergin karakterisaation syvällisin kohta.

Kaikki työssä esitetyt tulokset ovat reaaliavaruuksien tapauksessa tunnettuja. Suurin osa lauseista yleistyy metriseen avaruuteen vaivattomasti, eikä niitä ole sen vuoksi tietääksemme julkaistu aiemmin. John-Nirenbergin lemman todistus metrisen avaruuden tapauksessa on Mateaun, Mattilan, Nicolaun ja Orobitgin mukainen [14]. Coifman-Rochbergin karakterisaation todistus metrisessä avaruudessa on tehty mukaillen Garcia-Cuervan ja Rubio de Francian versiota avaruudessa $\mathbb{R}^n$ [6]. Käänteinen Hölderin epäyhtälö metrisessä avaruudessa on todistettu aiemmin ainakin lähteessä [19]. Tämän lähestymistavan sijaan käytämme Calderón-Zygmundin hajotelmaa ja seuraamme Coifmanin ja Feffermanin $\mathbb{R}^n$:n maksimaalifunktioideaa [2]. Todistamme Calderón-Zygmundin hajotelman metrisessä avaruudessa hieman yleisesti kirjallisuudesta löytyvia versioita tarkemmassa muodossa, mikä mahdollistaa Coifmanin ja Feffermanin todistuksen muokkaamisen metriseen avaruuteen sopivaksi.

Oletammme lukijalta perustiedot mitta- ja integrointiteoriasta ja metrisistä avaruuksista, mutta muu tarvittava teoria esitellään. Avaruus $\mathbb{R}^n$ mainitaan usein helppona esimerkkinä, ja lukijan on halutessaan mahdollista ajatella koko työn lävitse työskentelevänsä $\mathbb{R}^n$:ssä, joka on varustettu n-ulotteisella Lebesguen mitalla. Käyttämämme notaatio on kenties muutamaa erikseen mainittavaa poikkeusta lukuunottamatta standardia.

Reaaliavaruuksien tapauksessa pääasialliset lähteet ovat olleet yleisesti harmonisen analyysin osalta Javier Duoandikoetxean mainio teos Fourier Analysis [4] ja erityisesti Muckenhouptin painojen osalta Elias M. Steinin Harmonic Analysis [18]. Metrisen avaruuden analyysiin on haettu ideoita ja todistuksia Juha Heinosen kirjasta Lectures on Analysis on Metric Spaces [8].

Luku 2

Metrinen mitta-avaruus

Tässä kappaleessa tarkastelemme metristä mitta-avaruutta (X, d, μ), jossa mitta μ on tuplaava. Tarkoituksenamme on yleistää n-ulotteisella Lebesguen mitalla varustetusta $\mathbb{R}^n$:stä tuttuja lauseita ja myöhemmin tarvittavia aputuloksia ja metriseen avaruuteen. Vastaavat todistukset $\mathbb{R}^n$:ssä löytyvät useimmista reaalianalyysia käsittelevistä teoksista, kuten esimerkiksi [5] ja [16].

Tästä eteenpäin ei-triviaalilla positiivisella lokaalisti äärellisellä Borelin ulkomitalla tarkoitamme funktiota

$$\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty],$$

jolle Borelin joukot $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ovat mitallisia ja jolle jokaisen säteeltään aidosti positiivisen pallon mitta on aidosti positiivinen ja äärellinen. Funktio

$$f : X \to \mathbb{R}$$

on lokaalisti integroituva, ja merkitsemme $f \in L^1_{loc}(X)$, jos se on μ-mitallinen, ja jos jokaisella rajoitetulla joukolla $E \subset X$ pätee $f \in L^1(E)$. Ajattelemme, että palloon $B \subset X$ liittyy aina tietty keskipiste $x \in X$ ja säde $r > 0$. Lisäksi merkitsemme σB:llä pallon B kanssa samankeskistä, mutta säteeltään σ-kertaista palloa.

2.1 Tuplaavat mitat

Työskennellessämme metrisessä avaruudessa meiltä puuttuu ennalta tieto avaruuden mahdollisesti äärellisestä dimensiosta tai avaruuden geometriasta. Metrinen mitta-avaruus sellaisenaan onkin liian yleinen tilanne analyysin kannalta. Käyttökelpoinen vaatimus, joka rajoittaa tarkasteltavien avaruuksien joukkoa geometrisilta ominaisuuksiltaan parempiin, on käytettävän mitan tuplaavuus. Konkreettisia esimerkkejä tuplaavista mitta-avaruuksista löytyy vaikkapa Krantzin kirjasta A Panorama of Harmonic Analysis [13, luku 6].

Määritelmä 2.1 (Tuplaava mitta). *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Positiivinen ei-triviaali ja lokaalisti äärellinen Borelin ulkomitta μ X:llä on tuplaava, mikäli on olemassa vakio $C_\mu > 0$ siten, että kaikilla palloilla $B \subset X$ pätee*

$$\mu(2B) \leq C_\mu \mu(B). \tag{2.1}$$

Tässä työssä merkitsemme C:llä vakioita, jotka riippuvat tuplaavuusvakiosta C_μ. Vakio ei välttämättä ole sama kaikissa kohdissa, mutta tätä ei erikseen mainita, ellei sillä ole merkitystä tarkasteltavan tilanteen kannalta.

Jos mitta on tuplaava, sanotaan, että mitta-avaruus (X, μ) on tuplaava. Tuplaavuudella voidaan tarkoittaa myös metrisen avaruuden tuplaavuusominaisuutta, joka on välttämätön, mutta ei riittävä ehto tuplaavan mitan olemassaololle.

Määritelmä 2.2 (Tuplaava avaruus). *Metrinen avaruus (X, d) on tuplaava, jos on olemassa vakio N siten, että kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$ pallo $B(x, r)$ voidaan peittää korkeintaan N:llä $r/2$-säteisellä pallolla.*

Metrisen avaruuden tuplaavuus siis tarkoittaa, että jokaisessa r-säteisessä pallossa ja siten jokaisessa rajoitetussa joukossa on korkeintaan N kappaletta pisteitä, joiden etäisyys toisistaan on yli $r/2$.

Lemma 2.3. *Olkoon (X, d) tuplaava ja N tuplaavuuteen liittyvä vakio. Tällöin kaikilla $x \in X$, $r > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ pallo $B(x, r)$ voidaan peittää korkeintaan N^n:llä $r/2^n$-säteisellä pallolla.*

Todistus. Kun $n = 1$, väite seuraa suoraan avaruuden tuplaavuudesta. Oletetaan, että väite on totta jollekin $n \in \mathbb{N}$. Nyt jokainen $r/2^n$-säteinen pallo voidaan tuplaavuuden perusteella peittää korkeintaan N:llä $r/2^{n+1}$-säteisellä pallolla, mistä seuraa, että alkuperäinen pallo on peitetty korkeintaan N^{n+1}:llä $r/2^{n+1}$-säteisellä pallolla.

□

Lemma 2.4. *Olkoon (X, d, μ) tuplaava. Tällöin on olemassa universaali vakio K siten, että jos $r > 0$ ja $\{B(x_i, r_i)\}_{i=1}^n$ ovat pareittain pistevieraita palloja, jotka kuuluvat palloon $B(x, r)$ jollakin $x \in X$ ja joiden säteet $r_i \geq r/2$, niin $n \leq K$.*

Todistus. Olkoon $1 \leq i \leq n$. Triviaalisti $d(x, x_i) < r$. Olkoon $z \in B(x, r)$ mielivaltainen. Tällöin

$$d(x_i, z) \leq d(x_i, x) + d(x, z) \leq 2r,$$

joten $B(x, r) \subset B(x_i, 2r)$. Toisaalta $r_j \geq r/2$, joten $B(x_j, r/2) \subset B(x_j, r_j)$ kaikilla $1 \leq j \leq n$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mu(B(x_j, r/2)) &\leq \sum_{j=1}^{n} \mu(B(x_j, r_j)) \\
&= \mu(\bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r_j)) \\
&\leq \mu(B(x, r)) \\
&\leq \mu(B(x_i, 2r)) \\
&\leq C\mu(B(x_i, r/2)).
\end{aligned}$$

Summataan tämä yli i:n, mistä seuraa, että

$$n \sum_{j=1}^{n} \mu(B(x_j, r/2)) \leq C \sum_{i=1}^{n} \mu(B(x_i, r/2)),$$

eli $n \leq K = C$.

$\square$

On helppo huomata, että metrinen avaruus on tuplaava, jos siellä on määritelty tuplaava mitta.

Propositio 2.5. *Jos (X,d) on varustettu tuplaavalla mitalla μ, (X,d) on tuplaava metrisenä avaruutena.*

Todistus. Olkoon $B(x_0,r) \subset X$ mielivaltainen, ja olkoon $E \subset B(x_0,r)$ mikä tahansa äärellinen joukko, jolle pätee $d(x,y) \geq \frac{r}{2}$ kaikilla $x,y \in E$. Merkitään $B(x) = B(x,r/4)$. Jos nyt $x,y \in E$, niin pätee $B(x) \cap B(y) = \emptyset$, mutta $B(x) \subset B(x_0,2r)$. Tällöin

$$\begin{aligned}\sum_{x\in E}\mu(B(x)) &= \mu(\bigcup_{x\in E}B(x)) \\ &\leq \mu(B(x_0,2r)) \\ &\leq C\mu(B(x_0,r)).\end{aligned}$$

Toisaalta $B(x_0,2r) \subset B(x,8r)$, joten mitan tuplaavuuden nojalla

$$\mu(B(x_0,2r)) \leq \mu(B(x,8r))) \leq C\mu(B(x))),$$

eli

$$\mu(B(x)) \geq \frac{1}{C}\mu(B(x_0,2r)).$$

Yhdistämällä nämä saadaan, että

$$\mu(B(x_0,r)) \geq \frac{1}{C}\sum_{x\in E}\mu(B(x)) \geq \frac{\#E}{C}\mu(B(x_0,2r)),$$

missä $\#E$ tarkoittaa joukon E alkioiden lukumäärää. Toisin sanoen $\#E \leq C$, eli E:n alkioiden lukumäärä on rajoitettu E:stä riippumattomalla vakiolla. Kerätään joukoksi E siis suurin mahdollinen määrä pisteitä, joille $d(x,y) \geq \frac{r}{2}$. Olkoon $z \in B(x_0,r)$ mielivaltainen. Tällöin jollakin $x \in E$ pätee $z \in B(x,r/2)$, toisin sanoen

$$\{B(x,r/2)\}_{x\in E}$$

on $B(x_0,r)$:n peite.

$\square$

Luku 2 ei ole keskeinen tuplaavuuden määritelmässä, vaan epäyhtälössä (2.1) $2r$ voidaan korvata mielivaltaisella säteellä $R \geq r$. Tällöin vakio riippuu tuplaavuusvakiosta ja säteiden suhteesta.

Propositio 2.6. *Olkoon (X,d,μ) tuplaava. Tällöin kaikilla $x \in X$ ja $R \geq r$ pätee*

$$\frac{\mu(B(x,R))}{\mu(B(x,r))} \leq C_\mu\left(\frac{R}{r}\right)^Q,$$

missä $Q = \log_2 C_\mu$.

Todistus. On olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$2^k r < R \leq 2^{k+1} r,$$

jolloin

$$k < \log_2 \frac{R}{r}.$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}
\mu(B(x,R)) &\leq \mu(B(x, 2^{k+1}r)) \\
&\leq C_\mu^{k+1} \mu(B(x,r)) \\
&\leq C_\mu C_\mu^{\log_2 R/r} \mu(B(x,r)) \\
&= C_\mu \left(\frac{R}{r}\right)^{\log_2 C_\mu} \mu(B(x,r)),
\end{aligned}$$

mistä väite seuraa.

□

On tärkeää huomata, että jos $\mathbb{R}^n$ varustetaan n-ulotteisella Lebesguen mitalla, vakio Q on avaruuden dimensio. Mitan tuplaavuus siis todellakin liittää metriseen avaruuteen eräänlaisen dimension vastineen. Joissakin lähteissä vakiota Q kutsutaan avaruuden μ-dimensioksi.

Huomio 2.7. Myöskään lemmassa 2.4 ei ole merkitystä sillä, että pallojen säteet ovat yli puolet säteestä r, vaan kaikilla $M > 0$ on olemassa yläraja K_M siten, että jos $r_i \geq r/M$, niin $n \leq K_M$.

2.2 Peitelauseita

Peitelauseet ovat mittateorian perustyökaluja. Ne heijastavat avaruuden geometrisia ominaisuuksia, ja niiden avulla on mahdollista päätellä lokaalin tarkastelun perusteella koko avaruutta koskevia tuloksia. Yksinkertaisin ja tutuin esimerkki lokaaliuden hyödyntämisestä on kompaktien joukkojen peittäminen aina äärellisellä osapeitteellä mistä tahansa avoimesta peitteestä lähtien. Peitelauseet voivat olla hyvinkin yleisiä. Todistamme yhden yleisen, missä tahansa avaruudessa pätevän peitelauseen esimerkkinä tästä. Jos tämän lauseen oletuksiin lisätään esimerkiksi avaruuden tuplaavuus, saadaan osapeite numeroituvaksi. Tällaisia peitelauseita kutsutaan usein *Vitali-tyyppisiksi*. Vitalin peitelause, jonka myös esitämme, on mahdollista todistaa yleisen peitelauseen avulla (katso [8, lause 1.6]). Todistamme sen kuitenkin konstruktiivisesti.

Yleisen peitelauseen 2.9 todistuksessa tarvitsemme Zornin lemmaa. Lemman kanssa ekvivalentin Hausdorffin maksimaalisuusperiaatteen todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [16, Appendix].

Lause 2.8 (Zornin lemma). *Olkoon $\mathcal{P} \neq \emptyset$ osittain järjestetty. Jos jokaisella ketjulla on yläraja, $\mathcal{P}$:llä on maksimaalinen alkio.*

Lause 2.9 (Yleinen peitelause). *Olkoon $\mathcal{F}$ perhe palloja, joille pätee*

$$\sup\{\operatorname{diam}(B) \ : \ B \in \mathcal{F}\} < +\infty.$$

Tällöin on olemassa osaperhe $\mathcal{G}$ pareittain pistevieraita palloja siten, että

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} 5B.$$

Erityisesti jokainen $B \in \mathcal{F}$ leikkaa jotain $\mathcal{G}$:n palloa, jonka säde on vähintään puolet sen omasta säteestä.

Todistus. Asetetaan $R = \sup\{\operatorname{diam}(B) \ : \ B \in \mathcal{F}\}$. Olkoon Ω inkluusiolla osittain järjestetty kokoelma $\mathcal{F}$:n osaperheitä ω siten, että

1. $B \cap B' \neq \emptyset$ kaikilla $B, B' \in \omega$.
2. Jos on olemassa $B'' \in \mathcal{F}$ s.e. $B \cap B' \neq \emptyset$ jollain $B' \in \omega$, niin on olemassa $B'' \in \omega$ s.e. $B \cap B'' \neq \emptyset$ ja $\operatorname{diam} B'' \geq \frac{1}{2} \operatorname{diam} B$.

Selvästi $\Omega \neq \emptyset$, sillä $\omega = \{B\} \in \Omega$, jos B:n halkaisija on hyvin lähellä R:ää. Tällöin

$$\operatorname{diam} B \geq \frac{1}{2} \operatorname{diam} B'$$

kaikilla $B' \in \mathcal{F}$. Olkoon $\mathcal{C} \subset \Omega$ mielivaltainen ketju. Tällöin selvästi

$$\omega \subset \bigcup_{\omega\in\mathcal{C}} \omega =: \omega_0$$

kaikilla $\omega \in \mathcal{C}$. Jos on olemassa $B \in \mathcal{F}$ siten, että $B \cap B' \neq \emptyset$ jollakin $B' \in \omega_0$, on olemassa $\omega \in \mathcal{C}$ siten, että $B' \in \omega$, joten $\omega_0 \in \Omega$. Näin ollen ω_0 on $\mathcal{C}$:n yläraja. Zornin lemman nojalla on siis olemassa maksimaalinen $\mathcal{G} \in \Omega$, joka määritelmänsä mukaan koostuu pistevieraista palloista.

Oletetaan, että on olemassa $B \in \mathcal{F}$ siten, että $B \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Valitaan tällöin B_0 siten, että B_0:n halkaisija on suurempi kuin puolet yhdenkään $\mathcal{G}$:tä leikkaamattoman pallon halkaisija. Nyt olemme kuitenkin konstruoineet perheen $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \{B_0\}$, joka kuuluu Ω:an, sillä määritelmän mukaan jokainen pallo $B \in \mathcal{F}$, joka leikkaa $\mathcal{G}'$:a, leikkaa myös vähintään $\operatorname{diam} B/2$-säteistä palloa. Tämä on ristiriita $\mathcal{G}$:n maksimaalisuuden kanssa.

Jokainen $B(x, r) \in \mathcal{F}$ leikkaa siis palloa $B'(x', r') \in \mathcal{G}$ siten, että $r \leq 2r'$. Tällöin

$$B \subset 5B'.$$

$\square$

Lause 2.10 (Vitalin peitelause). *Olkoon (X, d) tuplaava avaruus, $E \subset X$ ja $\mathcal{F}$ perhe palloja, joiden keskipisteet ovat E:ssä ja joille pätee*

$$\sup\{\operatorname{diam}(B) \ : \ B \in \mathcal{F}\} < +\infty.$$

kaikilla $B \in \mathcal{F}$. Tällöin on olemassa numeroituva osaperhe $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ pareittain pistevieraita palloja siten, että

$$E \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} 5B.$$

Todistus. Merkitään $\mathcal{F} = \{B(x, r(x))\}_{x \in E}$. Oletetaan ensin, että E on rajoitettu, mistä seuraa, että on olemassa pallo B_0, joka sisältää E:n peitteen. Valitaan piste $x_1 \in E$ siten, että

$$r(x_1) > \frac{1}{2} \sup_{x \in E} r(x).$$

Konstruoidaan jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seuraavasti: asetetaan

$$E_n = E \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, 5r(x_i))$$

ja aina kun on mahdollista, valitaan $x_n \in E_n$ siten, että

$$r(x_n) > \frac{1}{2} \sup_{x \in E_n} r(x).$$

Tällä tavoin konstruoidut pallot $B(x_i, r(x_i))$ ja $B(x_n, r(x_n))$ ovat pistevieraita, kun $i < n$. Muutoin olisi olemassa $x_0 \in B(x_i, r(x_i)) \cap B(x_n, r(x_n))$ ja

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &\leq d(x_i, x_0) + d(x_0, x_j) \\ &\leq r(x_i) + r(x_n) \\ &\leq r(x_i) + 2r(x_i) \\ &< 5r(x_i), \end{aligned}$$

sillä

$$r(x_n) \leq \sup_{x \in E_n} r(x) \leq \sup_{x \in E_i} r(x) < 2r(x_i).$$

Piste x_n oli kuitenkin valittu siten, että

$$x_n \notin B(x_i, 5r(x_i)).$$

Jos on olemassa sellainen $n \in \mathbb{N}$, että ei voida löytää vaaditut ehdot toteuttavaa pistettä x_n, niin

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, 5r(x_i))$$

ja väite on todistettu. Jos taas konstruktiota voidaan jatkaa äärettömän pitkään, pallojen säde suppenee kohti nollaa. Jos näin ei tapahtuisi, olisi olemassa aidosti positiivinen ϵ ja ääretön määrä säteeltään ϵ:ia suurempia erillisiä palloja, jotka sisältyvät palloon B_0. Tämä on kuitenkin mahdotonta lemman 2.3 nojalla.

Oletetaan vielä, että on olemassa

$$x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, 5r(x_i)).$$

Koska $r(x_n)$ menee nollaan, kun n lähestyy ääretöntä, voidaan löytää $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$r(x) > 2r(x_{n_0}).$$

Nyt kuitenkin $x \in E_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten

$$\sup_{x \in E_{n_0}} r(x) \geq r(x) > 2r(x_{n_0}) > \sup_{x \in E_{n_0}} r(x),$$

mikä on ristiriita.

Oletetaan sitten, että $E \subset X$ ei ole rajoitettu. Nyt pistettä x_n ei voida valita täysin vapaasti joukosta E_n, sillä tällöin konstruktio ei välttämättä tyhjennä joukkoa E. Ongelma voidaan välttää esimerkiksi lähtemällä peittämään joukkoa jostain kiinteästä pisteestä $x_0 \in E$ alkaen ja valitsemalla yllä olevassa prosessissa pisteet x_n siten, että jos x ja y ovat mahdolliset uudet keskipisteet ja $d(y, x_0) > 2d(x, x_0)$, niin valitaan x.

Voisimme toki myös osoittaa, että tuplaava avaruus (X, d) on aina separoituva, jolloin peitteen numeroituvuus seuraa välittömästi.

□

Yleisen peitelauseen todistuksesta voimme huomata, että lause pätee jossain määrin yleisemmillekin peitteille kuin palloille, ja Vitalin peitelauseessa ei ole merkitystä sillä, ovatko peittävät pallot suljettuja vai avoimia. Erityisesti yleinen peitelause toimii missä tahansa avaruudessa. Yleensä sovelluksissa tarvitaan kuitenkin peitteen numeroituvuutta, ja siten Vitalin peitelausetta. Tämä edellyttää jotain lisää joko avaruuden geometrialta tai mitalta. Edellä esitetyn Vitalin peitelauseen todistuksessa käytimme hyväksi tietoa, että metrinen avaruus on tuplaava, mikä tietenkin proposition 2.5 nojalla pätee aina, kun työskentelemme tuplaavan mitan kanssa.

Propositio 2.11 (Whitneyn hajotelma). *On olemassa vakiot $\sigma, K > 0$ siten, että kaikilla avoimilla ja rajoitetuilla $U \subset X$ on olemassa jono pareittain pistevieraita palloja $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ siten, että*

1. $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i$,
2. *Mikään U:n piste ei kuulu useampaan kuin K palloon $20B_i$,*
3. $\sigma B_i \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ *kaikilla $i \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Olkoon $x \in U$ ja $\delta_x = \operatorname{dist}(x, X \setminus U)$. Liitetään kuhunkin $x \in U$ säde $r_x = \frac{1}{100}\delta_x$. Selvästi

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x, r_x).$$

Koska U on rajoitettu, Vitalin peitelauseen nojalla on olemassa pareittain pistevieraat pallot $B_i = B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, siten, että

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i.$$

Lisäksi esimerkiksi $101B_i \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$, joten kohdat 1 ja 3 pätevät.

Oletetaan, että $y \in U$ kuuluu K palloon $20B_i$. Nyt jokainen $20B_i \subset B(y, 40r_i)$. Toisaalta kaikilla $1 \leq i \leq K$ pätee

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(x_i, X \setminus U) &\leq \operatorname{dist}(y, X \setminus U) + d(x_i, y) \\ &\leq \operatorname{dist}(y, X \setminus U) + 20r_i. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\delta_y \geq \delta_{x_i} - 20r_i = 100r_i - 20r_i > r_i,$$

mikä tarkoittaa, että $B(y, 40r_i) \subset B(y, 40\delta_y)$. Pistevieraat B_i $1 \le i \le K$ kuuluvat siis kiinteään palloon $B(y, 40\delta_y)$. Edelleen kaikilla $1 \le i \le K$

$$\begin{aligned} \delta_y &\le d(y, x_i) + \delta_{x_i} \\ &\le r_i + 100r_i, \end{aligned}$$

joten $r_i \ge \delta_y/101$. Pallo $B(y, 40\delta_y)$ sisältää siis K erillistä palloa, joiden säde on suurempi $\delta_y/101$. Lemman 2.4 ja huomautuksen 2.7 nojalla saadaan ristiriita suurilla K:n arvoilla.

□

Whitneyn hajotelman olennaisin kohta on väite 2. Se tarkoittaa, että tuplaavassa metrisessä avaruudessa suunnilleen samankokoisilla palloilla on äärelliset leikkaukset, ainakin jos sädettä pienentämällä pallot saadaan erillisiksi. Vakio 100 on tässä liioiteltu, mutta tärkeää on saada pallot tarpeeksi kauas joukon U reunasta.

2.3 Maksimaalifunktioepäyhtälöitä

Seuraavaksi todistamme muutamia heikon ja vahvan tyypin estimaatteja maksimaalifunktioille. Erittäin hyödyllinen lemma mitallisten funktioiden integraaleista ansaitsee kuitenkin ensin erityishuomiota.

Lemma 2.12. *Olkoon μ positiivinen mitta. Tällöin mielivaltaiselle μ-mitalliselle joukolle E ja μ-mitalliselle funktiolle f pätee*

$$\int_E |f|^p d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu\left(\{x \in E \,:\, |f(x)| > \lambda\}\right) d\lambda$$

kaikilla $0 < p < +\infty$.

Todistus. Olkoon f mitallinen, ja samoin $E \subset X$. Tällöin

$$\begin{aligned} \int_E |f|^p d\mu &= \int_X \chi_E(x) |f(x)|^p d\mu(x) \\ &= \int_X \chi_E(x) \left(p \int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-1} d\lambda \right) d\mu(x) \\ &= p \int_X \int_0^\infty \chi_E(x) \chi_{[0,|f(x)|)}(\lambda) \lambda^{p-1} d\lambda d\mu(x) \\ &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \int_X \chi_E(x) \chi_{\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}}(x) d\mu(x) d\lambda \\ &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(\{x \in E : |f(x)| > \lambda\}) d\lambda. \end{aligned}$$

Neljäs yhtälö saadaan Fubinin lauseella.

□

Lemman 2.12 voi todistaa myös suoralla todistuksella ensin yksinkertaisille funktioille, ja sitten approksimoimalla mitallista funktiota kasvavalla jonolla yksinkertaisia funktioita. Itse asiassa yleisempikin tulos pätee, nimittäin jos $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ on kasvava, differentioituva ja $\varphi(0) = 0$, niin

$$\int_X \varphi(|f|)d\mu = \int_0^\infty \varphi'(\lambda)\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})d\lambda.$$

Todistus on yllä olevan kaltainen.

Lause 2.13. *Olkoon (X, d, μ) tuplaava metrinen mitta-avaruus. Tällöin kaikilla positiivisilla Borelin mitoilla ν, μ-mitallisilla joukoilla $E \subset X$ ja $\lambda > 0$ pätee*

$$\mu(\{x \in E : |M\nu(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int_X d\nu, \tag{2.2}$$

missä C riippuu ainoastaan tuplaavuusvakiosta C_μ ja

$$M\nu(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)}\int_B d\nu, \tag{2.3}$$

missä supremum otetaan yli kaikkien pallojen B, joihin x kuuluu.

Todistus. Olkoon

$$E_\lambda = \{x \in E : |M\nu(x)| > \lambda\}.$$

Jos $x \in E_\lambda$, on olemassa $B_x \subset X$ siten, että $x \in B_x$ ja

$$\frac{1}{\mu(B_x)}\int_{B_x} d\nu > \lambda. \tag{2.4}$$

Tällöin saamme peitteen

$$E_\lambda \subset \bigcup_{x \in E_\lambda} B_x,$$

missä palloille B_x pätee epäyhtälö (2.4). Jotta voisimme käyttää Vitalin peitelausetta, tulee pallojen B_x säteiden olla tasaisesti rajoitettuja. Tarkastellaan siis hetki maksimaalifunktiota

$$M_r\nu(x) = \sup_{\substack{B \ni x \\ \operatorname{diam} B \leq r}} \frac{1}{\mu(B)}\int_B d\nu$$

jollakin $0 < r < +\infty$. Selvästi

$$\{x \in E : |M_{r_1}\nu(x)| > \lambda\} \subset \{x \in E : |M_{r_2}\nu(x)| > \lambda\}$$

kaikilla $r_1 \leq r_2$ ja

$$\{x \in E : |M\nu(x)| > \lambda\} = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \{x \in E : |M_r\nu(x)| > \lambda\}$$

kaikilla $\lambda > 0$. Mitan perusominaisuuksista seuraa tällöin, että

$$\mu(\{x \in E : |M\nu(x)| > \lambda\}) = \lim_{r \to \infty} \mu(\{x \in E : |M_r\nu(x)| > \lambda\}).$$

Jos epäyhtälö (2.2) siis pätee maksimaalifunktiolle $M_r\nu$ kaikilla $0 < r < +\infty$, se pätee myös $M\nu$:lle. Todistuksessa käytettävä argumentti ei kuitenkaan riipu r:stä, joten seuraavassa ymmärrämme $M\nu$:n $M_r\nu$:n raja-arvona, kun $r \to +\infty$.

Vitalin peitelauseen perusteella on olemassa numeroituva osapeite pareittain pistevieraita palloja B_i, $i = 1, 2, \ldots$ siten, että

$$E_\lambda \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\mu(\{x \in E : |M\nu(x)| > \lambda\}) &\leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(5B_i) \\
&\leq C \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} d\nu \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \int_{\cup_i B_i} d\nu \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \int_X d\nu.
\end{aligned}$$

□

Lauseen 2.13 todistus olisi yksinkertaisempi tapauksessa, jossa μ on lisäksi Borel-säännöllinen, eli kaikilla μ-mitallisilla $E \subset X$ pätee

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \inf\{\mu(U) \,:\, E \subset U, U \text{ avoin}\} \\
&= \sup\{\mu(K) \,:\, K \subset E,\ V \text{ kompakti}\}.
\end{aligned}$$

Tällöin voisimme helposti osoittaa, että

$$\mu(K) \leq \frac{C}{\lambda} \int_X d\nu$$

pätee kaikille avoimen joukon E_λ kompakteille osajoukoille K, sillä K voidaan peittää äärellisellä määrällä epäyhtälön (2.4) toteuttavia palloja. Itse asiassa μ voidaankin olettaa Borel-säännölliseksi rajoittamatta merkittävästi tutkittavien avaruuksien joukkoa. Todistamme myöhemmin, että jos (X, d) on lisäksi täydellinen, seuraa μ:n säännöllisyys tuplaavuudesta.

Edellisestä lauseesta saadaan helposti vahvan tyypin L^p-epäyhtälö, kun $d\nu = f d\mu$, jollakin $f \in L^p$.

Propositio 2.14. *Olkoon $f \in L^p(X)$, $1 < p < +\infty$. Tällöin on olemassa $C = C(C_\mu, p)$ siten, että*

$$\int_X |Mf|^p d\mu \leq C \int_X |f|^p d\mu.$$

Todistus. Kaikilla $\lambda > 0$ f voidaan kirjoittaa summana

$$\begin{aligned}
f &= f\chi_{\{f > \lambda/2\}} + f\chi_{\{f \leq \lambda/2\}} \\
&=: f_1 + f_2.
\end{aligned}$$

Maksimaalioperaattori M on sublineaarinen, joten

$$Mf \leq Mf_1 + Mf_2 \leq Mf_1 + \lambda/2.$$

Tällöin $\{Mf > \lambda\} \subset \{Mf_1 > \lambda/2\}$ ja

$$\begin{aligned}
\mu(\{Mf > \lambda\}) &\leq \mu(\{Mf_1 > \lambda/2\}) \\
&\leq \frac{C}{\lambda/2}\int_X |f_1| d\mu \\
&\leq \frac{C}{\lambda}\int_{\{f>\lambda/2\}} |f| d\mu
\end{aligned}$$

heikon tyypin epäyhtälön (2.2) perusteella. Nyt lemman 2.12 mukaan

$$\begin{aligned}
\int_X |Mf|^p d\mu &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(\{Mf > \lambda\}) d\lambda \\
&\leq Cp\int_0^\infty \lambda^{p-2}\left(\int_{\{f>\lambda/2\}} |f| d\mu\right) d\lambda \\
&\leq Cp\int_X \left(\int_0^{2|f|} \lambda^{p-2} d\lambda\right) |f| d\mu \\
&= \frac{Cp}{p-1} 2^{p-1}\int_X |f|^p d\mu.
\end{aligned}$$

$\square$

2.4 Lebesguen lause

Nyt olemme keränneet riittävästi työkaluja ja todistamme Lebesguen lauseen.

Lause 2.15 (Lebesguen lause). *Olkoon X lokaalisti kompakti ja (X, d, μ) tuplaava sekä $f \in L^1_{loc}(X)$. Tällöin*

$$\limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0 \tag{2.5}$$

μ-melkein kaikilla $x \in X$.

Todistus. Olkoon

$$f^*(x) = \limsup_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y).$$

Nyt $(\cdot)^*$ on ei-negatiivinen sublineaarinen operaattori lokaalisti integroituvilla funktioilla, ja $f^*(x) \geq 0$ kaikilla $f \in L^1_{loc}(X)$ ja $x \in X$. Selvästi

$$(\alpha f)^* = |\alpha| f^*$$

ja

$$(f+g)^* \leq f^* + g^*$$

kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in L^1_{loc}(X)$. Olkoon g lisäksi jatkuva pisteessä $x \in X$, ja $\epsilon > 0$ annettu. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|g(x) - g(y)| < \epsilon$, kun $y \in B(x, \delta)$, joten

$$\fint_{B(x,\delta)} |g(y) - g(x)| d\mu(y) < \epsilon.$$

Koska $(\cdot)^*$ on ei-negatiivinen, se siis häviää identtisesti jatkuvilla funktioilla. Tällöin sublineaarisuudesta seuraa, että jos $f \in L^1_{loc}(X)$ ja g on jatkuva,

$$\begin{aligned} f^* &= (f - g + g)^* \\ &\leq (f - g)^* + g^* \\ &= (f - g)^*, \end{aligned}$$

joten kaikilla $t > 0$

$$\{x \in X \;:\; f^*(x) > t\} \subset \{x \in X \;:\; (f - g)^*(x) > t\}.$$

Lisäksi kaikilla $x \in X$ pätee

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \limsup_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) \\ &\leq \limsup_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} |f| d\mu + |f(x)|, \end{aligned}$$

eli

$$f^* \leq Mf + |f|.$$

Nyt lauseen 2.13 nojalla

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X \;:\; f^*(x) > t\}) &\leq \mu(\{x \in X \;:\; (f - g)^*(x) > t\}) \\ &\leq \mu(\{x \in X \;:\; M(f - g)(x) > t/2\}) \\ &\quad + \mu(\{x \in X \;:\; |f - g|(x) > t/2\}) \\ &\leq \frac{C}{t} \|f - g\|_{L^1}, \end{aligned}$$

sillä triviaalisti

$$\mu(\{x \in X \;:\; |f - g|(x) > t/2\}) \leq \frac{2}{t} \int_X |f - g| d\mu.$$

Lokaalisti kompakteissa avaruuksissa jatkuvat funktiot ovat tiheässä avaruudessa $L^1(X)$, joten epäyhtälön oikea puoli saadaan mielivaltaisen pieneksi. Olemme siis osoittaneet, että $f^* = 0$ μ-melkein kaikilla $x \in X$, mistä väite seuraa.

$\square$

Oletus, että (X, d) on lokaalisti kompakti, on tarpeettoman vahva Lebesguen lauseen voimassaololle. Lause pätee itse asiassa ainakin kaikissa avaruuksissa, joissa Vitalin peitelause on voimassa, esimerkiksi siis tuplaavassa metrisessä avaruudessa. Lokaali kompaktius ei myöskään ole välttämätön, mutta kuitenkin riittävä ehto jatkuvien funktioiden tiheydelle L^1-funktioiden joukossa. Todistus, jossa ei vedota tiheysargumenttiin, samoin kuin yllä oleva todistuskin, löytyy lähteestä [8, lauseet 1.8 ja 2.7].

Osoitamme nyt, että jos (X, d) on täydellinen ja tuplaava, suljetut ja rajoitetut joukot ovat kompakteja. Avaruuden olettaminen lokaalisti kompaktiksi ei siis tarkastelemiemme avaruuksien tapauksessa ole kovinkaan merkittävä lisäoletus. Todistuksessa tarvitsemme seuraavaa tuttua tulosta.

Lause 2.16. *Olkoon (X, d) täydellinen. Tällöinen $\overline{K} \subset X$ on kompakti jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ ja $x_1, \ldots, x_{N_\epsilon} \in K$ siten, että*

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N_\epsilon} B(x_j, \epsilon),$$

toisin sanoen K on suhteellisesti kompakti.

Propositio 2.17. *Olkoon (X, d) on täydellinen ja tuplaava. Tällöin suljetut ja rajoitetut joukot ovat kompakteja.*

Todistus. Osoitamme, että lauseen oletuksilla pallot ovat suhteellisesti kompakteja. Tällöin mielivaltaiselle rajoitetulle $E \subset X$ on olemassa suljettu ja siten kompakti pallo $\overline{B} \subset X$ siten, että $E \subset \overline{B}$. Jos E on lisäksi suljettu, se on kompaktin joukon osajoukkona kompakti.

Olkoot siis $B \subset X$ ja $\epsilon > 0$ mielivaltaisia, ja merkitään r:llä B:n sädettä. Tällöin on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $\epsilon > r/2^{n_\epsilon}$. Lemman 2.3 nojalla B voidaan peittää korkeintaan N^{n_ϵ}:lla $r/2^{n_\epsilon}$-säteisellä pallolla. Tästä seuraa, että

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{N^{n_\epsilon}} B(x_j, \epsilon),$$

missä $x_1, \ldots, x_{n_\epsilon} \in B$.

$\square$

Lauseen 2.18 todistus löytyy lähteestä [16, lause 2.18].

Lause 2.18. *Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus, jossa jokainen avoin joukko on numeroituva unioni kompakteista joukoista. Tällöin jokainen positiivinen Borelin mitta μ, jolle pätee $\mu(K) < +\infty$ kaikilla kompakteilla $K \subset X$, on säännöllinen.*

Metrinen avaruus, jossa suljetut ja rajoitetut joukot ovat kompakteja, on selvästi lokaalisti kompakti. Lisäksi, jos $U \subset X$ on avoin, kaikilla $x \in U$ on olemassa $r_x > 0$ siten, että $B(x, r_x) \subset U$, joten erityisesti

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x, \frac{r_x}{6}).$$

Koska U on avoin, voidaan yleisyyttä menettämättä olettaa, että $r_x \leq M$. Vitalin peitelauseen nojalla voidaan poimia numeroituva osapeite $\{B(x_i, \frac{r_{x_i}}{6})\}_{i=1}^{\infty}$ siten, että

$$U \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, \frac{5r_{x_i}}{6}) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}(x_i, \frac{5r_{x_i}}{6}) \subset \bigcup_{x \in U} B(x_i, r_{x_i}) = U$$

eli U on numeroituva yhdiste kompakteista joukoista $\overline{B}(x_i, \frac{5r_{x_i}}{6})$. Koska olimme lisäksi olettaneet, että rajoitetut joukot ovat äärellismittaisia, tuplaava μ on täydellisessä avaruudessa Borel-säännöllinen.

2.5 Tuplaavien mittojen olemassaolosta

Totesimme aiemmin, että metrisen avaruuden tuplaavuus on välttämätön ehto tuplaavan mitan olemassaololle. Riittävä ehto on tämän lisäksi avaruuden täydellisyys [8, lause 13.5]. Erityisesti voidaan todistaa, että jos (X, d):n eristettyjen pisteiden joukko on tyhjä, on olemassa avoin X:ssä tiheä joukko, jossa ei ole olemassa tuplaavaa mittaa [17].

Tämän työn tarkoituksena ei kuitenkaan ole perehtyä tuplaavien mitta-avaruuksien ominaisuuksiin, vaan tuplaavat mitat ovat järkeviä työvälineitä tarkastellessamme BMO-funktioita metrisissä avaruuksissa. Propositio 2.17 ja lause 2.18 takaavat, että metrisen avaruuden ollessa täydellinen mitalla on Borelin säännöllisyysominaisuus, ja avaruus on lokaalisti kompakti. Ottaen huomioon, että ei-täydellinen metrinen avaruus voi olla todella hankala, oletamme täydellisyyden implisiittisesti aina tarvittaessa, pyrkimättä todistamaan lauseita minimioletuksilla. Täydellisessä metrisessä avaruudessahan myös avaruuden tuplaavuus ja tuplaavan mitan olemassaolo ovat ekvivalentteja.

Vaikka tuplaava mitta mittana ei olekaan pääasiallinen tarkastelun kohteemme, olemme luonnollisesti kiinnostuneita sen vaikutuksista BMO-funktioiden määritelmään. Työssä halutaankin pohtia tuplaavuuden merkitystä esitetylle teorialle.

Luku 3

BMO metrisessä avaruudessa

Tässä luvussa pääsemme itse asiaan eli määrittelemme keskimääräiseltä heilunnaltaan rajoitetut eli BMO-funktiot tuplaavassa metrisessä mitta-avaruudessa (X, d, μ). Olkoon $C = C(C_\mu)$ jälleen jokin tuplaavuusvakiosta riippuva, ei välttämättä aina sama vakio.

3.1 Määritelmä ja perusominaisuuksia

BMO-funktiot määritellään uuden maksimaalifunktion avulla. Tarkastelemme tämän maksimaalifunktion yhteyttä tuttuun Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktioon ja osoitamme muutamia keskeisiä BMO:n ominaisuuksia.

Määritelmä 3.1 (BMO). *Olkoon $f \in L^1_{loc}(X)$. Määritellään lokaalisti integroituville funktioille maksimaalifunktio*

$$M^\# f(x) = \sup_{B \ni x} \fint_B |f - f_B| d\mu, \tag{3.1}$$

missä supremum otetaan yli kaikkien pallojen $B \subset X$, joihin x kuuluu, ja

$$f_B = \fint_B f d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu.$$

Asetetaan

$$\|f\|_{BMO(X)} = \|M^\# f\|_\infty$$

ja

$$BMO(X) = \{f \in L^1_{loc}(X) : \|f\|_{BMO} < +\infty\}. \tag{3.2}$$

Funktion keskiarvo jossakin joukossa on funktion integraali kyseisen joukon yli jaettuna joukon mitalla. Funktion heilahtelu puolestaan tarkoittaa funktion poikkeamaa keskiarvostaan, eli funktion ja sen keskiarvon erotuksen itseisarvoa. Keskimääräinen heilahtelu jossakin joukossa on siis tämän erotuksen keskiarvo, toisin sanoen heilahtelun integraali joukon yli jaettuna jälleen joukon mitalla. Yllä olevan määritelmän mukaan avaruuteen BMO(X) kuuluvat siis funktiot, joiden keskimääräinen heilahtelu on rajoitettua. Maksimaalioperaattorin $M^\#$ ottivat käyttöön Fefferman ja Stein

1972 osoittaakseen, että dyadisen maksimaalifunktion $M_d f$ ja $M^{\#}f$:n L^p-normit ovat ekvivalentit (katso esimerkiksi [7, Lause 7.4.5]).

Yhtälön (3.1) määrittelemän maksimaalifunktion ja Hardy-Littlewoodin keskitetyn maksimaalifunktion

$$M_c f(x) = \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} |f| d\mu$$

välillä pätee pisteittäinen epäyhtälö, kun avaruus on tuplaava.

Propositio 3.2. *Maksimaalioperaattorille $M^{\#}$ ja Hardy-Littlewoodin maksimaalio-peraattorille pätee*

$$M^{\#} f(x) \le C M_c f(x)$$

kaikilla $x \in X$ ja vakio $C = C(C_\mu)$.

Todistus. Määritellään ensin yleisempi Hardy-Littlewoodin maksimaali-funktio

$$M f(x) = \sup_{B \ni x} \fint_B |f| d\mu.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\fint_B |f - f_B| d\mu &\le \left(\fint_B |f| d\mu + \fint_B |f_B| d\mu \right) \\
&= \left(\fint_B |f| d\mu + |f_B| \right) \\
&= \left(\fint_B |f| d\mu + |\fint_B f d\mu| \right) \\
&\le 2 \fint_B |f| d\mu,
\end{aligned}$$

joten

$$M^{\#} f(x) \le 2 M f(x)$$

kaikilla $x \in X$. Toisaalta

$$\begin{aligned}
\sup_{B \ni x} \fint_B |f| d\mu &= \sup_{\substack{z \in X \\ R>0 \\ d(x,z)<R}} \fint_{B(z,R)} |f| d\mu \\
&= \sup_{\substack{z \in X \\ R>0 \\ d(x,z)<R}} \frac{\mu(B(x,3R))}{\mu(B(z,R))} \frac{1}{\mu(B(x,3R))} \int_{B(z,R)} |f| d\mu.
\end{aligned}$$

Selvästi $B(z,R) \subset B(x,3R)$ ja $B(x,3R) \subset B(z,10R)$ kaikilla $z \in B(x,R)$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\sup_{B \ni x} \fint_B |f| d\mu &\le \sup_{\substack{z \in X \\ R>0 \\ d(x,z)<R}} \frac{\mu(B(z,10R))}{\mu(B(z,R))} \fint_{B(x,3R)} |f| d\mu \\
&\le C \sup_{\tilde{R}>0} \fint_{B(x,\tilde{R})} |f| d\mu,
\end{aligned}$$

missä $C = C(C_\mu)$ riippuu vain tuplaavuusvakiosta C_μ. Olemme siis näyttäneet, että

$$M^\# f(x) \leq 2CM_c f(x).$$

$\square$

Todistuksesta on helppo havaita, että mikäli $X = \mathbb{R}^n$ varustettuna n-ulotteisella Lebesguen mitalla, vakio riippuu ainoastaan avaruuden dimensiosta n.

Proposition 3.2 avulla tiedämme maksimaalifunktion $M^\# f$ käytöksestä paljon jo Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktion perusteella. Esimerkiksi aina, kun $Mf \in L^p(X)$, myös $M^\# f \in L^p(X)$. Kuten Hardy-Littlewoodin maksimaalioperaattorikin, myös $M^\#$ on sublineaarinen.

Ennen kuin siirrymme tarkastelemaan BMO:n perusominaisuuksia on todettava, että $\|\cdot\|_{BMO}$ ei varsinaisesti ole normi vaan seminormi. On siis mahdollista, että $\|f\|_{BMO}$ saa arvon nolla, vaikka funktio ei olisikaan identtisesti nolla. Tarkemmin pätee

$$\|f\|_{BMO} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = \text{vakio} \quad \mu - \text{m.k.}$$

Todellakin, olkoon $\|f\|_{BMO} = 0$. Tällöin

$$\fint_B |f - f_B| d\mu = 0$$

kaikilla $B \subset X$. Tästä seuraa, että

$$f(y) = f_B$$

melkein kaikilla $y \in B$ ja kaikilla $B \subset X$. Tällöin f on vakio. Oletetaan, että näin ei ole, vaan on olemassa pallot B_1 ja B_2 siten, että

$$f_{B_1} \neq f_{B_2}.$$

Nyt valitsemalla $B \subset X$ siten, että $B_1 \subset B$ ja $B_2 \subset B$ saadaan ristiriita sen kanssa, että funktion arvon pitäisi olla vakio koko pallossa B. Toisaalta, jos $f = c$, missä c on mielivaltainen vakio,

$$\fint_B |f - f_B| d\mu = 0$$

kaikilla $B \subset X$, mistä seuraa

$$\|f\|_{BMO} = 0,$$

sillä $\fint_B c d\mu = c$. Ongelma voidaan välttää määrittelemällä BMO(X) yhtälön (3.2) sijaan ekvivalenssirelaation

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f - g = c$$

ekvivalenssiluokkien avaruudeksi

$$\text{BMO}(X)/_\sim.$$

Merkitään tätä avaruutta kuitenkin edelleen BMO(X):llä. Puhuessamme yleisesti BMO-funktioista tarkoitamme siis täsmällisemmin ekvivalenssiluokkia. Usein tällä tulkinnalla ei ole käytännön merkitystä, mutta juuri BMO$(X)/_\sim$ on Banachin avaruus. Vektoriavaruuden aksioomien tarkastaminen on yksinkertaista. Olkoot $f, g \in$

BMO(X) ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Tällöin $(\lambda M^{\#} f)(x) = |\lambda| M^{\#} f(x)$ ja sublineaarisuudesta seuraa, että

$$M^{\#}(f+g)(x) \leq M^{\#} f(x) + M^{\#} g(x),$$

joten

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{BMO} &= |\lambda| \|f\|_{BMO} < +\infty \\
\|f+g\|_{BMO} &\leq \|f\|_{BMO} + \|g\|_{BMO} < +\infty.
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että λf, $f + g \in$ BMO(X). Todistamme hieman myöhemmin, että BMO(X) on normiavaruutena täydellinen.

Millaisia funktiota BMO-luokkaan sitten kuuluu? Totesimme määritelmän 3.1 sanovan oleellisesti, että BMO-avaruuden muodostavat funktiot, joiden keskimääräinen poikkeaminen keskiarvostaan on rajoitettua. Voimme myös osoittaa, että mikäli funktion poikkeaminen mistä tahansa kiinteästä vakiosta on rajoitettua, funktio on BMO(X):ssä. Erityisesti rajoitetut funktiot ovat BMO-funktioita.

Propositio 3.3. 1. *Jos $f \in L^1_{loc}(X)$, niin $f \in BMO(X)$ jos ja vain jos on olemassa $M \in [0, \infty)$ siten, että*

$$\fint_B |f - f_B| d\mu \leq M$$

kaikilla $B \subset X$.

2. *Jos on olemassa vakio M ja mahdollisesti B:sta riippuva vakio c_B siten, että*

$$\fint_B |f - c_B| d\mu \leq M$$

kaikilla $B \subset X$, niin $f \in BMO(X)$.

3. *Aina pätee $L^\infty(X) \subset BMO(X)$, mutta on olemassa (X, μ) siten, että $BMO(X) \not\subset L^\infty(X)$.*

Todistus. Kohdan 1 väite seuraa suoraan normin $\|\cdot\|_\infty = \sup \operatorname{ess} |\cdot|$ määritelmästä.

Kohdassa 2 olkoon $B \subset X$ mielivaltainen. Tällöin

$$\begin{aligned}
\fint_B |f - f_B| d\mu &\leq \fint_B |f - c_B| d\mu + \fint_B |c_B - f_B| d\mu \\
&\leq M + |f_B - c_B| \\
&= M + \left| \fint_B f d\mu - c_B \right| = M + \left| \fint_B (f - c_B) d\mu \right| \\
&\leq M + \fint_B |f - c_B| d\mu \\
&\leq 2M.
\end{aligned}$$

Kohdan 1 perusteella $f \in$ BMO(X), ja $\|f\|_{BMO} \leq 2M$.

Todistetaan vielä kohdan 3 inkluusio. Olkoon $f \in L^\infty(X)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\fint_B |f - f_B| d\mu &\leq \fint_B |f| d\mu + \fint_B |f_B| d\mu \\
&\leq 2 \fint_B |f| d\mu \\
&\leq 2 \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

kaikilla $B \subset X$. Väite seuraa nyt kohdan 1 perusteella.

$\mathbb{R}^n$:ssä klassinen esimerkki $BMO \setminus L^\infty$-funktiosta on $\log|x|$. Metrisessä avaruudessa tilanne ei ole aivan näin yksinkertainen, ja konstruoimme vastaesimerkin luvussa 7 todistettuamme ensin Coifman-Rochbergin lauseen 7.3.

$\square$

Propositio 3.4. *Olkoot $f, g \in BMO(X)$. Tällöin*

1. $|f| \in BMO(X)$
2. $\min\{f,g\}$, $\max\{f,g\} \in BMO(X)$.

Todistus. Olkoot $f, g \in \mathrm{BMO}(X)$. Selvästi kaikilla $B \subset X$

$$\big|\,|f| - |f_B|\,\big| \quad \leq \quad |f - f_B|,$$

joten

$$⨍_B \big|\,|f| - |f_B|\,\big| d\mu \quad \leq \quad ⨍_B |f - f_B| d\mu \leq \|f\|_{BMO},$$

ja proposition 3.3 kohdan 2 perusteella, vakiolla $c_B = |f_B|$, $|f| \in \mathrm{BMO}(X)$. Lisäksi

$$\big\|\,|f|\,\big\|_{BMO} \leq 2\|f\|_{BMO}.$$

Kohta 2 seuraa suoraan kohdasta 1, sillä

$$\begin{aligned} \max\{f,g\} &= \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|, \\ \min\{f,g\} &= \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g| \end{aligned}$$

ja $\mathrm{BMO}(X)$ on vektoriavaruus, joten $\max\{f,g\}$ ja $\min\{f,g\} \in \mathrm{BMO}(X)$.

$\square$

3.2 Avaruuden BMO(X) täydellisyys

Ekvivalenssiluokkien avaruus $\mathrm{BMO}(X)$ on täydellinen varustettuna normilla $\|\cdot\|_{BMO} = \|M^{\#} \cdot \|_\infty$. Todistus on konstruktiivinen.

Lause 3.5 (Täydellisyys). *$BMO(X)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Olkoon $x_0 \in X$ mielivaltainen, ja määritellään

$$B_k = B(x_0, k),$$

kun $k \in \mathbb{N}$. Selvästi $B_1 \subset B_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten $\mu(B_k)^{-1} \leq \mu(B_1)^{-1}$. Olkoon sitten $(f_j)_{j=1}^\infty$ mielivaltainen Cauchyn jono BMO:ssa. Mikäli Cauchyn jonolla on suppeneva osajono, koko jono suppenee. Poimitaan siis alkuperäisestä Cauchyn jonosta osajono $(f_j)_{j_k=1}^{\infty}$ siten, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$\|f_{j_{k+1}} - f_{j_k}\|_{BMO} \le 2^{-k-1}\mu(B_k)^{-1}. \tag{3.3}$$

Merkitään

$$g_0 = f_{j_1}, \quad g_k = f_{j_{k+1}} - f_{j_k}.$$

Tällöin, kun $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |g_k(y) - (g_k)_B| &= |f_{j_{k+1}}(y) - f_{j_k}(y) - \fint_B (f_{j_{k+1}} - f_{j_k})d\mu| \\ &\le |f_{j_{k+1}}(y) - f_{j_k}(y)| + \fint_B |f_{j_{k+1}} - f_{j_k}|d\mu, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \fint_B |g_k - (g_k)_B|d\mu &\le 2\fint_B |f_{j_{k+1}} - f_{j_k}|d\mu \\ &\le 2\,\|f_{j_{k+1}} - f_{j_k}\|_{BMO} \\ &\le 2^{-k}\mu(B_k)^{-1} \\ &\le 2^{-k}\mu(B_1)^{-1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja kaikilla palloilla $B \subset X$. BMO:n määritelmän perusteella voimme valita

$$(g_k)_{B_k} = \fint_{B_k} g_k d\mu = 0$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$, sillä jos

$$(g_k)_{B_k} = c_k \neq 0,$$

tutkitaan jonoa $\tilde{g}_k = g_k - c_k$. Määritelmän mukaanhan $\tilde{g_k} \sim g_k$. Tällöin epäyhtälöstä (3.4) seuraa, että

$$\fint_{B_k} |g_k|d\mu \le 2^{-k}\mu(B_k)^{-1} \tag{3.5}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Määritellään

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$$

ja näytetään, että $f \in \mathrm{BMO}(X)$. Funktio on hyvin määritelty μ-melkein kaikilla $x \in X$, sillä $X = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} \int_{B_n} \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|d\mu &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{B_n} |g_k|d\mu + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{B_n} |g_k|d\mu \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{B_n} |g_k|d\mu + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{B_k} |g_k|d\mu \\ &\le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{B_n} |g_k|d\mu + \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ensimmäinen epäyhtälö pätee, sillä $B_n \subset B_k$, kun $k \ge n$, ja toinen saadaan epäyhtälön (3.5) avulla.

Jokaiselle pallolle $B \subset X$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $B \subset B_n$, joten epäyhtälöstä (3.6) ja Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseesta seuraa, että

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} g_k\Big)_B = \fint_B \sum_{k=0}^{\infty} g_k d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \fint_B g_k d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} (g_k)_B$$

kaikilla $B \subset X$. Nyt

$$\begin{aligned}
\fint_B |f - f_B| d\mu &= \fint_B \Big|\sum_{k=0}^{\infty} g_k - \Big(\sum_{k=0}^{\infty} g_k\Big)_B\Big| d\mu \\
&\leq \fint_B \sum_{k=0}^{\infty} |g_k - (g_k)_B| d\mu \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \fint_B |g_k - (g_k)_B| d\mu \\
&\leq \mu(B_1) \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

epäyhtälön (3.4) perusteella. Proposition 3.3 kohdan 1 nojalla $f \in \mathrm{BMO}(X)$.

Osoitetaan sitten, että $(f_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ suppenee BMO:ssa kohti funktiota f.

$$\begin{aligned}
\fint_B |(f - f_{j_n}) - (f - f_{j_n})_B| d\mu &= \fint_B \Big|\sum_{k=n}^{\infty} g_k - \sum_{k=n}^{\infty} (g_k)_B\Big| d\mu \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} \fint_B |g_k - (g_k)_B| d\mu \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k}.
\end{aligned}$$

Selvästi siis

$$\|f - f_{j_n}\|_{BMO} \leq \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k},$$

ja koska epäyhtälön oikeapuoli menee nollaan, kun $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_{j_n}\|_{BMO} = 0.$$

$\square$

Avaruus $BMO(X, \mu)$ on Banachin avaruus, vaikka mitta μ ei olisikaan tuplaava. Itse asiassa edes avaruuden (X, d) tuplaavuutta ei tarvita. Onkin luonnollista kysyä, että mikä tuplaavuuden rooli oikeastaan on BMO-funktioiden teoriassa, ja voisimmeko korvata määritelmän 3.1 jollakin toisella. Mitan tuplaavuus tulee kuitenkin kriittiseksi oletukseksi viimeistään BMO-funktiot karakterisoivien John-Nirenbergin lemman 4.1 ja Coifman-Rochbergin lauseen 7.3 kohdalla.

Luku 4

John-Nirenbergin lemma

John-Nirenbergin lemma, jonka F. John ja L. Nirenberg todistivat 1961, on yksi BMO-funktiot karakterisoivista lauseista. Lemma sanoo, että missä tahansa pallossa mielivaltaiselle vakiolle $\lambda > 0$ pallon osa, jossa BMO-funktion heilahtelu ylittää λ:n, on mitaltaan rajoitettu. Vielä olennaisempaa on, että suurille vakioille tämä joukko on mitaltaan pieni. BMO-funktio voi siis heilahdella rajusti vain mitaltaan hyvin pienessä joukossa. Toisaalta funktio, jolle yhtälö (4.1) pätee, on BMO-funktio.

Lause 4.1 (John-Nirenbergin lemma). *On olemassa vakiot c_1 ja c_2, jotka riippuvat ainoastaan tuplaavuusvakiosta C_μ siten, että kaikilla $f \in BMO(X)$ ja jokaisella pallolla $B \subset X$ pätee*

$$\mu(\{x \in B : |f(x) - f_B| > \lambda\}) \leq c_1 \mu(B) e^{-\lambda \frac{c_2}{\|f\|_{BMO}}} \tag{4.1}$$

kaikilla $\lambda > 0$.

Haluamme osoittaa, että mielivaltaisen pallon $B \subset X$ osa, jossa funktio poikkeaa keskiarvostaan yli mielivaltaisen vakion, on mitaltaan rajoitettu. Jos X on $\mathbb{R}^n$ varustettuna n-ulotteisella Lebesguen mitalla, voimme käyttää pallojen sijasta dyadisia kuutioita. Tällöin todistuksessa käytetään funktiolle $f - f_B$ Calderón-Zygmundin hajotelmaa jakamaan kuutio hyvään osaan, jossa f:n heilahtelu on ylhäältä rajoitettua, ja tämän huonoon komplementtiin, joka halutaan osoittaa mitaltaan rajoitetuksi. Sama toistetaan iteraatiossa kullekin huonolle kuutiolle. Dyadisesti jaetuilla kuutioilla on se hyvä ominaisuus, että kunkin kuution alikuutiot ovat edelleen $\mathbb{R}^n$:n ja alkuperäisen kuution kuutioita. Metrisessä avaruudessa joudumme kuitenkin luopumaan kuutioista, eivätkä pallot käyttäydy samoin. Olkoon $B \subset X$ mielivaltainen. Nyt (B, d_B) on metrinen avaruus indusoidulla metriikalla

$$d_B(x, y) = d(x, y),$$

kun $x, y \in B$. Kuitenkin avaruuden (B, d_B) pallot ovat muotoa $B \cap B_X$, missä B_X on avaruuden (X, d) pallo. Nämä indusoidun avaruuden pallot eivät siis välttämättä ole muodoltaan lainkaan pallojen kaltaisia. On lisäksi otettava huomioon, että mitta μ rajoitettuna indusoituun avaruuteen (B, d_B) ei välttämättä ole enää tuplaava. Tämän vuoksi todistuksessa työskennellään tutkittavaa palloa sopivasti suuremmassa pallossa, joka takaa, että tarvittavien peitteiden pallot ovat (X, d):n palloja.

Metriseen avaruuteen siirryttäessä tarvitsisimme Calderón-Zygmundin jakoa sovellettuna palloille. Calderón-Zygmundin hajotelmasta ei voi olla olemassa täydellisesti $\mathbb{R}^n$:ää vastaavaa versiota, vaan palloilla toteutetut hajotelmat ovat aina jollain tavalla heikompia (katso esimerkiksi [13, lemma 6.2.8]). Seuaavassa lähteen [14] mukaisessa todistyksessa hajotelman käyttö kierretään käyttämällä hyväksi maksimaalifunktiotekniikkaa ja Vitalin peitelausetta. Vitalin peitelause palauttaa meidät vaatimukseen avaruuden tuplaavuudesta. Myöhemmin luvussa 6 esittelemme yhden version Calderón-Zygmundin hajotelmasta metrisessä avaruudessa. Sen todistuksessa käytetään samaa maksimaalifunktioideaa kuin John-Nirenbergin lemmassakin, mikä saa meidät uskomaan, että sitä olisi mahdollista soveltaa myös tässä todistuksessa.

4.1 John-Nirenbergin lemman todistus

Olkoot $x_0 \in X$ ja $R > 0$ mielivaltaiset, ja merkitään

$$B_0 = B(x_0, R).$$

Jos $x \in B_0$, ja $0 < r < \frac{12}{5}R$, on olemassa vakio $\sigma > 1$ siten, että

$$B(x,r) \subset B(x_0, \sigma R) = \sigma B_0.$$

Selvästi esimerkiksi $\sigma = 5$ kelpaa. Määritellään sitten maksimaalifunktio

$$M_\sigma f(x) = \sup_{\substack{B \ni x \\ B \subset \sigma B_0}} \fint_B |f - f_{B_0}| d\mu$$

ja

$$E_\lambda = \{x \in \sigma B_0 : M_\sigma f(x) > \lambda\},$$

kun $\lambda > 0$. Osoitetaan, että joukko E_λ on avoin. Olkoon $x \in E_\lambda$ mielivaltainen. Tällöin on olemassa $B_x \ni x$ siten, että $B_x \subset \sigma B_0$ ja

$$\fint_{B_x} |f - f_{B_0}| d\mu > \lambda.$$

Jos $z \in B_x$, niin

$$\begin{aligned} M_\sigma(z) &= \sup_{\substack{B \ni z \\ B \subset \sigma B_0}} \fint_B |f - f_{B_0}| d\mu \\ &\geq \fint_{B_x} |f - f_{B_0}| d\mu \\ &> \lambda, \end{aligned}$$

eli $z \in E_\lambda$. Olennaisesti totesimme myös, että

$$E_\lambda \subset \bigcup_{x \in E_\lambda} B_x \subset \sigma B_0,$$

missä peitteelle pätee

$$\frac{1}{\lambda} \int_{B_x} |f - f_{B_0}| d\mu > \mu(B_x). \tag{4.2}$$

Pallojen B_x säteet ovat ylhäältä rajoitettuja vakiolla σR, joten Vitalin peitelauseen nojalla on olemassa numeroituva osapeite pareittain pistevieraita palloja $B_i = B_{x_i}$, $i \in \mathbb{N}$ siten, että

$$E_\lambda \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \mu(E_\lambda) &\leq \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i) \\ &\leq C\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\ &\leq \frac{C}{\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_i} |f - f_{B_0}| d\mu \end{aligned}$$

yhtälön (4.2) perusteella. Koska $B_i \cap B_j = \emptyset$, kun $i \neq j$, ja $\cup_i B_i \subset \sigma B_0$, saamme edelleen, että

$$\begin{aligned} \frac{C}{\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_i} |f - f_{B_0}| d\mu &= \frac{C}{\lambda}\int_{\cup_i B_i} |f - f_{B_0}| d\mu \\ &\leq \frac{C}{\lambda}\int_{\sigma B_0} |f - f_{B_0}| d\mu \\ &\leq \frac{C}{\lambda}\left(\int_{\sigma B_0} |f - f_{\sigma B_0}| d\mu + \int_{\sigma B_0} |f_{\sigma B_0} - f_{B_0}| d\mu\right). \end{aligned}$$

Ensimmäinen termi on selvästi rajoitettu, sillä

$$\begin{aligned} \int_{\sigma B_0} |f - f_{\sigma B_0}| d\mu &\leq \mu(\sigma B_0)\|f\|_{BMO} \\ &\leq C\mu(B_0)\|f\|_{BMO}. \end{aligned}$$

Jälkimmäisessä termissä integrandi on vakio, joten

$$\begin{aligned} \int_{\sigma B_0} |f_{\sigma B_0} - f_{B_0}| d\mu &= \mu(\sigma B_0)|\fint_{B_0} f - f_{\sigma B_0} d\mu| \\ &\leq \frac{\mu(\sigma B_0)}{\mu(B_0)}\int_{\sigma B_0} |f - f_{\sigma B_0}| d\mu \\ &\leq C\mu(\sigma B_0)\|f\|_{BMO} \\ &\leq C\mu(B_0)\|f\|_{BMO}. \end{aligned}$$

Yhdistämällä saadut epäyhtälöt voimme päätellä, että

$$\mu(E_\lambda) \leq \frac{C_1}{\lambda}\|f\|_{BMO}\mu(B_0), \tag{4.3}$$

missä C_1 riippuu ainoastaan tuplaavuusvakiosta. Valitaan $\lambda_0 = 2C_1\|f\|_{BMO}$. Tällöin

$$\mu(B_0 \cap E_{\lambda_0}) \leq \mu(E_{\lambda_0}) \leq \frac{1}{2}\mu(B_0) < \mu(B_0).$$

On siis olemassa ainakin yksi λ_0, siten, että $(X\setminus E_{\lambda_0}) \cap B_0 \neq \emptyset$. Olkoon $x \in B_0$, ja määritellään $r(x) = \frac{1}{30}\operatorname{dist}(x, X\setminus E_{\lambda_0})$. Selvästi

$$r(x) \leq \frac{1}{30}2R$$

kaikilla $x \in B_0$. Erityisesti pätee, että

$$B_0 \cap E_{\lambda_0} \subset \bigcup_{x \in B_0 \cap E_{\lambda_0}} B(x, r(x)) \subset E_{\lambda_0}.$$

Vitalin peitelauseen nojalla on jälleen olemassa numeroituva osapeite pareittain pistevieraita palloja $B_i = B(x_i, r(x_i))$, $i \in \mathbb{N}$ siten, että

$$B_0 \cap E_{\lambda_0} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i \subset E_{\lambda_0},$$

sillä $5B_i \subset E_{\lambda_0}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ r:n valinnan takia. Kuitenkin kaikilla $x \in B_0$

$$35r(x) = \frac{35}{30} \operatorname{dist}(x, X \backslash E_{\lambda_0}),$$

joten $35B_i \cap (X \backslash E_{\lambda_0}) \neq \emptyset$ jokaisella pallolla $35B_i$. On tärkeää, että vaikka pallot $35B_i$ leikkaavatkin jo E_{λ_0}:n komplementtia, silti pätee $35B_i \subset \sigma B_0$, sillä $35r(x_i) < 12R/5$. Kaikilla $x \in 35B_i \cap (X \backslash E_{\lambda_0})$ pätee siis, että

$$M_\sigma f(x) \leq \lambda_0,$$

joten erityisesti

$$⨍_{35B_i} |f - f_{B_0}| d\mu \leq \lambda_0 \tag{4.4}$$

jokaisella $35B_i$.

Merkitään ensimmäisen sukupolven palloja $B_{i_1} = 5B_i$, $i \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\begin{aligned} |f_{B_0} - f_{B_{i_1}}| &= |⨍_{5B_i} f - f_{B_0} d\mu| \\ &\leq \frac{\mu(35B_i)}{\mu(5B_i)} ⨍_{35B_i} |f(y) - f_{B_0}| d\mu \\ &\leq C_2 ⨍_{35B_i} |f - f_{B_0}| d\mu. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Lisäksi pätee, että

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_{i_1=1}^{\infty} B_{i_1}) &= \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i) \\ &\leq C \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = C\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \\ &\leq C\mu(E_{\lambda_0}) \\ &\leq \frac{C_2 \|f\|_{BMO}}{\lambda_0} \mu(B_0) \\ &\leq \frac{1}{2} \mu(B_0), \end{aligned} \tag{4.6}$$

kun oletetaan, että olimme alunperin valinneet $\lambda_0 = 2 \max\{C_1, C_2\} \|f\|_{BMO}$. Kun $x \in B_0 \backslash \cup_{i_1} B_{i_1} = B_0 \cap (X \backslash E_{\lambda_0})$, niin

$$M_\sigma f(x) \leq \lambda_0,$$

jolloin

$$⨍_B |f - f_B| d\mu \leq \lambda_0$$

kaikilla B, jotka sisältävät x:n ja $B \subset \sigma B_0$. Lebesguen lauseen 2.15 perusteella

$$|f(x) - f_{B_0}| = \lim_{\operatorname{diam}(B)\to 0} ⨍_B |f - f_{B_0}| d\mu \leq \lambda_0 \tag{4.7}$$

μ-melkein kaikilla $x \in B_0 \setminus \cup_{i_1} B_{i_1}$.

Nyt haluaisimme toistaa saman jokaiselle pallolle B_{i_1}. On olennaista huomata, että

$$\sigma 5 r(x) = \frac{25}{30} \operatorname{dist}(x, X \setminus E_{\lambda_0}) < \frac{12}{5} R$$

kaikilla $x \in B_{i_1}$. Vaikka siis suurennamme iteraatiossa palloja B_{i_1}, edelleen

$$\sigma B_{i_1} \subset \sigma B_0,$$

ja kaikki tarkastelemamme pallot ovat avaruuden (X, d) palloja.

Käymällä siis saman uudestaan lävitse jokaiselle B_{i_1} saamme konstruoitua toisen sukupolven pallot B_{i_1,i_2} siten, että

$$|f(x) - f_{B_{i_1}}| \leq \lambda_0 \tag{4.8}$$

μ-melkein kaikilla $x \in B_{i_1}$,

$$|f_{B_{i_1}} - f_{B_{i_1,i_2}}| \leq C_2 \lambda_0 \tag{4.9}$$

ja

$$\mu\Big(\bigcup_{i_2=1}^{\infty} B_{i_1 i_2}\Big) \leq \frac{1}{2} \mu(B_{i_1}). \tag{4.10}$$

Lisäksi epäyhtälöistä (4.6) ja (4.10) seuraa, että

$$\mu\Big(\bigcup_{i_1,i_2=1}^{\infty} B_{i_1,i_2}\Big) \leq \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 \mu(B_0)$$

ja

$$\begin{aligned} |f(x) - f_{B_0}| &\leq |f(x) - f_{B_{i_1}}| + |f_{B_{i_1}} - f_{B_{i_1,i_2}}| \\ &\leq \lambda_0 + C_2 \lambda_0 \\ &\leq 2 C_2 \lambda_0 \end{aligned}$$

μ-melkein kaikilla $x \in B_0 \setminus \cup_{i_1,i_2} B_{i_1 i_2}$ epäyhtälöiden (4.8) ja (4.9) nojalla, kun lisäksi todetaan, että tuplaavuusvakio $C_\mu \geq 1$ ja siten myös $C_2 \geq 1$.

Iteraatiossa askeleella k konstruoimme pallot $B_{i_1 \ldots i_k}$ siten, että

$$|f(x) - f_{B_0}| \leq k d_2 \lambda_0 \tag{4.12}$$

μ-melkein kaikilla $x \in B_0 \setminus \cup_{i_1 \ldots i_k} B_{i_1 \ldots i_k}$, ja

$$\mu\Big(\bigcup_{i_1 \ldots i_k=1}^{\infty} B_{i_1 \ldots i_k}\Big) \leq \Big(\frac{1}{2}\Big)^k \mu(B_0). \tag{4.13}$$

Olkoon sitten $\lambda > 0$ mielivaltainen. Mikäli $\lambda > d_2\lambda_0$, valitaan $k \in \mathbb{N}$ siten, että

$$kd_2\lambda_0 \leq \lambda \leq (k+1)d_2\lambda_0.$$

Tällöin

$$|f(x) - f_{B_0}| \leq kd_2\lambda_0 \leq k$$

μ-melkein kaikilla $x \in B_0 \setminus \cup_{i_1 \ldots i_k} B_{i_1 \ldots i_k}$, mistä seuraa, että

$$\{x \in B_0 \,:\, |f(x) - f_{B_0}| > \lambda\} \subset \bigcup_{i_1 \ldots i_k = 1}^{\infty} B_{i_1 \ldots i_k}$$

μ-nollamittaista joukkoa lukuunottamatta. Tällöin

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in B_0 \,:\, |f(x) - f_{B_0}| > \lambda\}) &\leq \mu(\bigcup_{i_1 \ldots i_k = 1}^{\infty} B_{i_1 \ldots i_k}) \\ &\leq (\frac{1}{2})^k \mu(B_0).\end{aligned}$$

Selvästi

$$k > \frac{\lambda}{d_2\lambda_0} - 1,$$

joten

$$2^{-k} = e^{-k \log 2} \leq e^{-(\frac{\lambda}{d_2\lambda_0} - 1) \log 2}$$

ja

$$\mu(\{x \in B_0 \,:\, |f(x) - f_{B_0}| > \lambda\}) \leq e e^{-\frac{\lambda}{d_2\lambda_0} \log 2} \mu(B_0). \tag{4.14}$$

Jos taas $\lambda \leq d_2\lambda_0$, käytämme triviaaliestimaattia

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in B_0 : |f(x) - f_{B_0}| > \lambda\}) &\leq \mu(B_0) \\ &= e e^{-1} \mu(B_0) \\ &\leq e e^{-\frac{\lambda}{d_2\lambda_0} \log 2} \mu(B_0), \end{aligned} \tag{4.15}$$

sillä

$$\frac{\lambda}{d_2\lambda_0} \log 2 \leq \frac{\lambda}{d_2\lambda_0} \leq 1.$$

Epäyhtälöistä (4.14) ja (4.15) seuraa, että

$$\mu(\{x \in B_0 \,:\, |f(x) - f_{B_0}| > \lambda\}) \leq c_1 \mu(B_0) e^{-\lambda \frac{c_2}{\|f\|_{BMO}}},$$

missä $c_1 = e$ on absoluuttinen vakio ja $c_2 = \log 2 (2C_2 \max\{C_1, C_2\})^{-1}$ riippuu ainoastaan tuplaavuusvakiosta.

$\square$

4.2 John-Nirenbergin lemman seurauksia

Ensimmäinen John-Nirenbergin lemman seurauksista on eräänlainen käänteinen Hölderin epäyhtälö. Funktion kuuluminen BMO-luokkaan johtaa suoraan tulokseen, joka ei pelkän määritelmän perusteella ole itsestään selvä. Nimittäin $f - f_B$ on itse asiassa p-integroituva missä tahansa pallossa, kun $1 < p < +\infty$.

Seuraus 4.2 (Käänteinen Hölderin epäyhtälö). *Olkoon* $1 < p < +\infty$ *ja*

$$\|f\|_{BMO,p} = \sup_{B\subset X} \left(⨍_B |f - f_B|^p d\mu \right)^{1/p}. \tag{4.16}$$

Tällöin on olemassa vakio $C = C(C_\mu, p) \geq 0$ *siten että*

$$\|f\|_{BMO} \leq \|f\|_{BMO,p} \leq C\|f\|_{BMO}.$$

Todistus. Ensimmäinen epäyhtälö seuraa suoraan Hölderin epäyhtälöstä, sillä

$$\begin{aligned} ⨍_B |f(y) - f_B| d\mu &\leq \frac{1}{\mu(B)} \left(\int_B |f - f_B|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_B d\mu \right)^{1/p'} \\ &= \frac{\mu(B)^{1/p}}{\mu(B)} \left(⨍_B |f - f_B|^p d\mu \right)^{1/p} \mu(B)^{1/p'} \\ &= \left(⨍_B |f - f_B|^p d\mu \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Käänteisessä puolessa tarvitsemme John-Nirenbergin lemmaa. Käyttämällä jälleen hyväksi lemmaa 2.12 voimme päätellä, että

$$\begin{aligned} \int_B |f - f_B|^p d\mu &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(\{x \in B : |f(x) - f_B| > \lambda\}) d\lambda \\ &\leq c_1 \mu(B) p \int_0^\infty \lambda^{p-1} e^{-\frac{c_2}{\|f\|_{BMO}}\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Tehdään muuttujanvaihto $s = c_2\lambda/\|f\|_{BMO}$, ja jaetaan $\mu(B)$:llä. Tällöin

$$\begin{aligned} ⨍_B |f - f_B|^p d\mu &\leq c_1 p \left(\frac{\|f\|_{BMO}}{c_2} \right)^p \int_0^\infty s^{p-1} e^{-s} ds \\ &= c_1 c_2^{-p} p \Gamma(p) \|f\|_{BMO}^p. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(X),p} \leq C\|f\|_{\mathrm{BMO}(X)},$$

missä vakio $C = c_1 c_2^{-p} p\Gamma(p)$ riippuu ainoastaan p:stä ja tuplaavuusvakiosta.

□

Seuraus 4.3 (Eksponentiaalinen integroituvuus). *Olkoon* c_2 *John-Nirenbergin lemman vakio. Jos* $f \in BMO(X)$, f *on eksponentiaalisesti integroituva minkä tahansa pallon yli. Toisin sanoen kaikilla* $0 < \epsilon < c_2$ *on olemassa vakio* $C = C(C_\mu, \epsilon)$ *siten, että kaikilla* $f \in BMO(X)$ *ja kaikilla palloilla* $B \subset X$ *pätee*

$$⨍_B e^{\epsilon|f - f_B|/\|f\|_{BMO}} d\mu \leq C.$$

Todistus. Lemman 2.12 nojalla lokaalisti integroituvalle $g : X \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ⨍_B e^{|g|} d\mu &= \frac{1}{\mu(B)} \int_0^\infty \mu(\{x \in B : e^{|g(x)|} > \nu\}) d\nu \\ &= \frac{1}{\mu(B)} \int_0^1 \mu(\{x \in B : e^{|g(x)|} > \nu\}) d\nu \\ &\quad + \frac{1}{\mu(B)} \int_1^\infty \mu(\{x \in B : e^{|g(x)|} > \nu\}) d\nu. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Koska $e^{|g(x)|} \geq 1$ kaikilla $x \in X$,

$$\{x \in B : e^{|g(x)|} > \nu\} = B,$$

kun $0 < \nu < 1$, joten yhtälön (4.17) ensimmäisestä termistä saadaan

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_0^1 \mu(\{x \in B : e^{|g(x)|} > \nu\}) d\nu = \frac{1}{\mu(B)} \int_0^1 \mu(B) d\nu = 1.$$

Soveltamalla toiseen termiin muuttujanvaihtoa $\log \nu = \lambda$ yhtälö saadaan muotoon

$$\fint_B e^{|g|} d\mu = 1 + \frac{1}{\mu(B)} \int_0^\infty e^\lambda \mu(\{x \in B : |g(x)| > \lambda\}) d\lambda.$$

Tällöin

$$\fint_B e^{\epsilon|f - f_B|/\|f\|_{BMO}} d\mu = 1 + \frac{1}{\mu(B)} \int_0^\infty e^\lambda \mu(\{x \in B : |f(x) - f_B| > \alpha\}) d\lambda,$$

missä $\alpha = \frac{\lambda \|f\|_{BMO}}{\epsilon}$. John-Nirenbergin lemman perusteella

$$\begin{aligned} \fint_B e^{\epsilon|f(x) - f_B|/\|f\|_{BMO}} d\mu(x) &\leq 1 + \frac{1}{\mu(B)} \int_0^\infty e^\lambda c_1 \mu(B) e^{-\frac{c_2}{\|f\|_{BMO}}\alpha} d\lambda \\ &= 1 + c_1 \int_0^\infty e^{(1 - \frac{c_2}{\epsilon})\lambda} d\lambda. \end{aligned}$$

Koska $\epsilon < c_2$, integraali suppenee, ja

$$\fint_B e^{\epsilon|f - f_B|/\|f\|_{BMO}} d\mu \leq C,$$

missä vakio C riippuu ainoastaan epsilonista ja tuplaavuusvakiosta C_μ.

$\square$

$\mathbb{R}^n$:ssä John-Nirenbergin lemma pätee tuplaavia mittoja laajemmalle joukolle, mutta on olemassa ei-tuplaava mitta, jolle John-Nirenbergin lemma ei toteudu [14]. Jollakin tavalla BMO-funktioiden ominaisuudet siis riippuvat avaruuden geometriasta. Metrisessä avaruudessa tekemämme analyysi osoittaa kuitenkin, että teoria on riippumatonta $\mathbb{R}^n$:n lineaarisesta rakenteesta. Kuutiot on mahdollista korvata palloilla ja niiden pistevieraus hyödyntämällä peitelauseita.

Luku 5

Muckenhouptin painot

Olkoon (X, d, μ) tuplaava. Tässä luvussa jätämme BMO-avaruuden hetkeksi rauhaan ja keskitymme A_p-painoihin, jotka tunnetaan myös nimellä Muckenhouptin painot. Tarkoituksenamme on esitellä sellaisia painojen ominaisuuksia, joita tarvitsemme kytkiessämme ne BMO-teoriaan luvussa 7. Perusominaisuudet ja -määritelmät eivät ole riippuvaisia avaruuden tuplaavuudesta. Sitä vastoin luvun päätulokset 5.9 ja 5.10, A_p-painon jakaminen A_1-painojen tuloksi ja A_1-painojen esityslause, riippuvat olennaisesti käänteisestä Hölderin epäyhtälöstä. Oletamme toistaiseksi ja todistamme luvussa 6 lauseessa 6.1, että kaikilla $\omega \in A_p$, $1 \leq p < +\infty$, on olemassa C ja $\epsilon > 0$ siten, että kaikilla $B \subset X$ pätee

$$\left(\fint_B \omega^{1+\epsilon} d\mu \right)^{1/(1+\epsilon)} \leq C \fint_B \omega d\mu. \tag{5.1}$$

Tuplaavuudella on tässä merkittävä rooli.

Motivaatiomme tutkia A_p-painoja lienee ilmeinen. Yhteys BMO-funktioihin ei kuitenkaan ole ainoa syy painoteorialle. Alunperin A_p-painot vastasivat kysymykseen, millä mitoilla ν epäyhtälö

$$\int_X |Mf(x)|^p d\nu(x) \leq A \int_X |f(x)|^p d\nu(x) \tag{5.2}$$

pätee. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ näin tapahtuu täsmälleen silloin, kun $d\nu(x) = \omega(x)dx$, ja $\omega \in A_p$ sekä $1 < p < +\infty$. Epäyhtälön (5.2) kaltaisilla estimaateilla käyttöä muun muassa L^p-operaattorien approksimoinnissa ja tutkittaessa singulaaristen integraalioperaattorien rajoittuneisuutta. Osoitamme, että jos μ on tuplaava, $d\nu = \omega d\mu$ ja $\omega \in A_p$, niin epäyhtälö (5.2) pätee.

Olkoon tästä eteenpäin q p:n konjugaattieksponentti, eli

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

5.1 Määritelmiä ja perusominaisuuksia

Määritelmä 5.1 (Muckenhouptin painot). *Olkoon $\omega \in L^1_{loc}(X)$ ei-negatiivinen. Tällöin ω toteuttaa A_1-ehdon, ja merkitään $\omega \in A_1$, jos kaikilla palloilla $B \subset X$*

$$\fint_B \omega d\mu \leq C_\omega \operatorname*{inf\,ess}_{x \in B} \omega(x).$$

Olkoon $1 < p < +\infty$. Nyt ω toteuttaa A_p-ehdon, ja merkitään $\omega \in A_p$, jos kaikilla palloilla $B \subset X$

$$\left(\fint_B \omega d\mu\right)\left(\fint_B \omega^{1-q} d\mu\right)^{p-1} \leq C_\omega.$$

C_ω on ω:n A_p-vakio.

Huomio 5.2. Suoraan määritelmän perusteella voimme todeta, että A_1-paino ω on joko nolla μ-melkein kaikkialla, tai sitten aidosti positiivinen μ-melkein kaikkialla.

Oletetaan, että $\omega = 0$ joukossa $E \subset X$, ja $\mu(E) > 0$. Voimme olettaa yleisyyttä menettämättä, että E on rajoitettu (jos näin ei ole, joukko $E \cap B$ on rajoitettu kaikilla palloilla B). Tällöin

$$0 \leq \fint_B \omega d\mu \leq C \operatorname*{inf\,ess}_{x \in B} \omega(x) \leq C \operatorname*{inf\,ess}_{x \in E} \omega(x) = 0$$

kaikilla $B \supset E$ ja $\omega = 0$ μ-melkein kaikkialla näissä palloissa. Toisaalta X voidaan tyhjentää tällaisilla palloilla. Osoitamme myöhemmin lauseessa 5.9, että jokainen A_p-paino voidaan esittää A_1-painojen tulona. Tämän perusteella yllä oleva pätee kaikilla A_p-painoilla. Oletetaan siis tästä eteenpäin, että tarkasteltavat A_p-painot ovat μ-melkein kaikkialla aidosti positiivisia.

Propositio 5.3 (Perusominaisuuksia).

1. *$A_p \subset A_s$ kaikilla $1 \leq p < s$.*
2. *$\omega \in A_p$ jos ja vain jos $\omega^{1-q} \in A_q$.*
3. *Jos $\omega_0, \omega_1 \in A_1$, niin $\omega_0 \omega_1^{1-p} \in A_p$.*

Suoraan määritelmiin perustuva todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [4, luku 7, propositio 7.2]. A_p-painot voidaan ekvivalentisti määritellä tavalla, joka liittää niihin selvemmin *painon* käsitteen.

Propositio 5.4 (Ekvivalentti määritelmä). *Olkoon $1 \leq p < +\infty$ ja $\omega \in L^1_{loc}(X)$ ei-negatiivinen. Tällöin $\omega \in A_p$ jos ja vain jos on olemassa vakio $C_\omega = C(C_\mu)$ siten, että kaikilla ei-negatiivisilla f ja palloilla $B \subset X$ pätee*

$$(f_B)^p \leq \frac{C_\omega}{\omega(B)} \int_B f^p \omega d\mu, \tag{5.3}$$

missä

$$\omega(B) = \int_B \omega d\mu.$$

Todistus. Oletetaan, että $\omega \in A_p$ jollakin $1 \le p < +\infty$. Tällöin

$$\begin{aligned} f_B &= \fint_B f\omega^{1/p}\omega^{-1/p}d\mu \\ &\le \frac{1}{\mu(B)}\left(\int_B f^p\omega d\mu\right)^{1/p}\left(\int_B \omega^{-q/p}d\mu\right)^{1/q} \end{aligned}$$

Hölderin epäyhtälön perusteella, joten

$$(f_B)^p \le \frac{1}{\mu(B)}\int_B f^p\omega d\mu \left(\fint_B \omega^{-q/p}d\mu\right)^{p/q}.$$

Siispä A_p-ehdon nojalla pätee, että

$$\begin{aligned} (f_B)^p &\le \frac{C_\omega}{\mu(B)}\int_B f^p\omega d\mu \left(\fint_B \omega d\mu\right)^{-1} \\ &= \frac{C_\omega}{\omega(B)}\int_B f^p\omega d\mu. \end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että yhtälö (5.3) toteutuu, ja olkoon $\epsilon > 0$. Jos asetetaan $f = (\omega+\epsilon)^{-q/p}$, pätee varmasti, että

$$\int_B (\omega+\epsilon)^{-q/p}d\mu < +\infty,$$

sillä $\omega(x)+\epsilon > \epsilon$ kaikilla $x \in X$. Lisäksi

$$\int_B (\omega+\epsilon)^{-q}\omega d\mu \le \int_B (\omega+\epsilon)^{-q/p}d\mu, \tag{5.4}$$

joten jos sijoitamme funktion f yhtälöön (5.3), pätee ekvivalentisti

$$\left(\fint_B (\omega+\epsilon)^{-q/p}d\mu\right)^p \left(\int_B (\omega+\epsilon)^{-q}\omega d\mu\right)^{-1}\int_B \omega d\mu \le C_\omega. \tag{5.5}$$

Ottamalla huomioon, että $-q/p = 1-q$ ja käyttämällä jälleen epäyhtälöä (5.4) saadaan epäyhtälö (5.5) muotoon

$$\left(\fint_B (\omega+\epsilon)^{-q}\omega d\mu\right)^{p-1}\fint_B \omega d\mu \le C_\omega,$$

mistä A_p-ehto seuraa, kun annetaan $\epsilon \to 0$.

$\square$

A_p-painoilla on se hyvä ominaisuus, että niiden määrittelemät mitat ovat tuplaavia. Tämä on helppo todistaa proposition 5.4 avulla.

Propositio 5.5. *Olkoon $1 \le p < +\infty$ ja $\omega \in A_p$. Tällöin ω määrittelee tuplaavan mitan, eli*

$$\omega(2B) \le C\omega(B)$$

jollakin vakiolla $C = C(C_\mu, C_\omega, p)$.

Todistus. Olkoon $B_0 \subset X$ mielivaltainen. Asetetaan epäyhtälössä (5.3) $f = \chi_{B_0}$ ja $B = 2B_0$, jolloin saadaan

$$\left(\fint_{2B_0} \chi_{B_0} d\mu\right)^p \leq \frac{C}{\omega(2B_0)} \int_{2B_0} \chi_{B_0}^p \omega d\mu,$$

eli toisin sanoen

$$\left(\frac{\mu(B_0)}{\mu(2B_0)}\right)^p \leq C \frac{\omega(B_0)}{\omega(2B_0)}.$$

Mitan μ tuplaavuuden nojalla pätee

$$\omega(2B_0) \leq C_\omega C_\mu^p \omega(B_0).$$

□

Käänteisestä Hölderin epäyhtälöstä 6.1 seuraa A_p-painojen eräänlainen itseparantuvuusominaisuus.

Propositio 5.6 (Itseparantuvuus). *Olkoon $1 < p < +\infty$ ja $\omega \in A_p$. Tällöin on olemassa $p_1 < p$ siten, että $\omega \in A_{p_1}$.*

Todistus. Proposition 5.3 nojalla $\omega^{-q/p} \in A_q$, joten käänteinen Hölderin epäyhtälö

$$\left(\fint_B (\omega^{-q/p})^{1+\epsilon} d\mu\right)^{1/(1+\epsilon)} \leq C_1 \fint_B \omega^{-q/p} d\mu \tag{5.6}$$

toteutuu joillakin $\epsilon > 0$ ja C_1. Lisäksi

$$\frac{q}{p}(1+\epsilon) = \frac{1+\epsilon}{p-1} = \frac{1}{p_1 - 1} = \frac{q_1}{p_1},$$

kun $p_1 = p/(1+\epsilon) - 1/(1+\epsilon) + 1$. Koska $p > 1$, pätee $p_1 < p$. Tällöin yhtälö (5.6) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left(\fint_B \omega^{-q_1/p_1} d\mu\right) \leq C_1^{1+\epsilon} \left(\fint_B \omega^{-q/p} d\mu\right)^{1+\epsilon}. \tag{5.7}$$

Toisaalta $-q/p = 1 - q$, joten ω:n A_p-ehto voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left(\fint_B \omega d\mu\right) \left(\fint_B \omega^{-q/p} d\mu\right)^{p/q} \leq C_2,$$

mistä edelleen seuraa, että

$$\begin{aligned}\left(\fint_B \omega^{-q/p} d\mu\right)^{1+\epsilon} &\leq C_2^{(1+\epsilon)q/p} \left(\fint_B \omega d\mu\right)^{-(1+\epsilon)q/p} \\ &= C_2^{q_1/p_1} \left(\fint_B \omega d\mu\right)^{-q_1/p_1}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Yhdistämällä epäyhtälöt (5.7) ja (5.8), saamme

$$\left(\fint_B \omega^{-q_1/p_1} d\mu\right) \leq C_1^{1+\epsilon} C_2^{q_1/p_1} \left(\fint_B \omega d\mu\right)^{-q_1/p_1}$$

ja

$$\left(\fint_B \omega^{-q_1/p_1} d\mu\right)^{p_1/q_1} \left(\fint_B \omega d\mu\right) \le C_1^{(1+\epsilon)p_1/q_1} C_2.$$

Toisin sanoen $\omega \in A_{p_1}$ vakiolla $C_1^{p/q} C_2$.

$\square$

5.2 Maksimaalifunktioepäyhtälöitä A_p-painoille

Kokoelmamme maksimaalifunktioepäyhtälöitä kaipaa vielä täydennystä A_p-painojen osalta.

Propositio 5.7. *Olkoon $\omega \in A_p$, $1 \le p < +\infty$. Tällöin*

$$\omega(\{x \in X \ : \ Mf(x) > \lambda\}) \le \frac{C}{\lambda^p} \int_X |f|^p \omega d\mu$$

kaikilla $f \in L^p(X, \omega d\mu)$.

Todistus. Olkoon $\omega \in A_p$ jollakin $1 \le p < +\infty$. Määritellään $L^p(X, \omega d\mu)$:llä maksimaalifunktio

$$\begin{aligned} M_\omega f(x) &= \sup_{B \ni x} \frac{1}{\omega(B)} \int_B |f| \omega d\mu \\ &= \sup_{B \ni x} \fint_B |f| d\omega, \end{aligned}$$

missä supremum otetaan yli kaikkien pallojen, joihin x kuuluu, ja $d\omega = \omega d\mu$. Proposition 5.5 perusteella painon ω määrittelemä mitta on tuplaava, joten heikon tyypin estimaatti 2.13 antaa

$$\begin{aligned} \omega(\{x \in X \ : \ M_\omega f(x) > \lambda\}) &\le \frac{C}{\lambda} \int_X f d\omega \\ &= \frac{C}{\lambda} \int_X f \omega d\mu \end{aligned} \tag{5.9}$$

kaikilla $\lambda > 0$. C riippuu nyt ω:n tuplaavuusvakiosta. Toisaalta $\omega \in A_p$, joten

$$(f_B)^p \le \frac{C}{\omega(B)} \int_B f^p \omega d\mu,$$

ja edelleen

$$\sup_{B \ni x} (f_B)^p \le C \sup_{B \ni x} \fint_B f^p d\omega.$$

Näin ollen Hardy-Littlewoodin ja $M_\omega f$-maksimaalifunktion välillä pätee pisteittäinen epäyhtälö

$$(Mf(x))^p \le C M_\omega f^p(x).$$

Epäyhtälö (5.9) sovellettuna vakiolle λ^p / C ja funktiolle f^p antaa

$$\omega(\{x \in X \ : \ M_\omega f^p(x) > \lambda^p / C\}) \le \frac{C}{\lambda^p} \int_X f^p \omega d\mu.$$

Olemme kuitenkin osoittaneet, että $M_\omega f^p \geq (Mf)^p/C$, joten

$$\{Mf(x) > \lambda\} \subset \{M_\omega f^p(x) > \lambda^p/C\},$$

ja väite seuraa.

□

Lause 5.8. *Olkoon $\omega \in A_p$, $1 < p < +\infty$. Tällöin*

$$\int_X |Mf|^p \omega d\mu \leq C \int_X |f|^p \omega d\mu \tag{5.10}$$

kaikilla $f \in L^p(X, \omega d\mu)$.

Todistus. Olkoon $\omega \in A_p$ jollakin $1 < p < +\infty$. Haluamme osoittaa, että maksimaalioperaattori $M : f \mapsto Mf$ on rajoitettu avaruudessa $L^p(X, \omega d\mu)$, eli toteuttaa vahvan epäyhtälön (5.10). Marcinkiewizin interpolaatiolause sanoo, että sublineaarinen operaattori, joka toteuttaa heikot epäyhtälöt joillakin $1 \leq p_0 < p_1 \leq +\infty$, toteuttaa vahvan epäyhtälön kaikilla $p_0 < p < p_1$. Operaattori M on selvästi rajoitettu avaruudessa $L^\infty(X, \omega d\mu)$, joten erityisesti se toteuttaa heikon epäyhtälön, kun $p = +\infty$. Lisäksi voimme käyttää A_p-painojen itseparantuvuusominaisuutta osoittamaan, että M toteuttaa heikon epäyhtälön jollain p:tä pienemmällä eksponentilla.

Proposiotion 5.6 nojalla on siis olemassa $p_1 < p$ siten, että $\omega \in A_{p_1}$ ja propositiosta 5.7 seuraa tällöin, että

$$\int_{\{Mf > \lambda\}} \omega d\mu \leq \frac{C}{\lambda^{p_1}} \int_X f^{p_1} \omega d\mu$$

kaikilla $\lambda > 0$ ja kaikilla $f \in L^{p_1}(X, \omega d\mu)$. Nyt Marcinkiewiczin interpolaatiolauseen perusteella M on vahva $(L^p(X, \omega d\mu), L^p(X, \omega d\mu))$.

□

5.3 A_p-painojen esityslauseet

Luvun 7 ja erityisesti Coifman-Rochbergin lauseen käänteisen tuloksen kannalta seuraava tulos on hyvin olennainen.

Lause 5.9. *Olkoon $\omega \in A_p$, $1 \leq p < +\infty$. Tällöin on olemassa $\omega_1, \omega_2 \in A_1$ siten, että $\omega = \omega_1 \omega_2^{1-p}$.*

Todistus. Todistetaan ensin tapaus $p = 2$. Olkoon $\omega \in A_2$ mielivaltainen ja f lokaalisti integroituva. Määritellään operaattori T seuraavasti:

$$Tf = \omega^{-1/2} M(\omega^{1/2} f) + \omega^{1/2} M(\omega^{-1/2} f).$$

Kun $\omega \in A_2$, pätee suoraan määritelmän perusteella $\omega^{-1} \in A_2$, joten lauseesta 5.8 seuraa, että kaikilla $f \in L^2(X)$ pätee

$$\begin{aligned} \|\omega^{-1/2}M(\omega^{1/2}f)\|_2^2 &= \int_X |\omega^{-1/2}M(\omega^{1/2}f)|^2 d\mu \\ &= \int_X |M(\omega^{1/2}f)|^2 \omega^{-1} d\mu \\ &\leq C\int_X |\omega^{1/2}f|^2\omega^{-1}d\mu \\ &= C\|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Sama pätee $\omega^{1/2}M(\omega^{-1/2}f)$:lle, joten $T : L^2(X) \to L^2(X)$ on rajoitettu. Lisäksi T on selvästi subadditiivinen, eli $T(f_1 + f_2) \leq Tf_1 + Tf_2$, sillä maksimaalioperaattori M on. Kiinnitetään $f \in L^2(X)$ siten, että $\|f\|_2 = 1$, ja merkitään

$$h = \sum_{n=1}^{\infty}(2C)^{-n}T^n(f). \tag{5.11}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(2C)^{-n}\|T(f)\|_2^n \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(2C)^{-n}C^n\|f\|_2^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}2^{-n} \end{aligned}$$

eli $h \in L^2(X)$. Toisaalta $Tf \geq 0$ kaikilla f, joten subadditiivisuudesta seuraa pisteittäinen epäyhtälö

$$\begin{aligned} Th &= T\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2C)^{-n}T^n(f)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}(2C)^{-n}T^{n+1}(f) \qquad (5.12) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(2C)^{1-n}T^n(f) \\ &= (2C)h. \end{aligned}$$

Jos asetamme $\omega_1 = \omega^{1/2}h$, niin

$$Th = \omega^{-1/2}M(\omega_1) + \omega^{1/2}M(\omega^{-1/2}h),$$

joten $M\omega_1 \leq Th\omega^{1/2} \leq (2C)h\omega^{1/2} = 2C\omega_1$, eli $\omega_1 \in A_1$. Vastaavasti, jos $\omega_2 = \omega^{-1/2}h$, niin $M\omega_2 \leq 2A\omega_2$, joten $\omega = \omega_1\omega_2^{-1}$ ja $\omega_1, \omega_2 \in A_1$.

Olkoot sitten $p \geq 2$, $\omega \in A_p$ ja määritellään

$$Tf = \left(\omega^{-1/p}M(\omega^{1/p}f^{p/q})\right)^{q/p} + \omega^{1/p}M(\omega^{-1/p}f).$$

Koska $p/q \geq 1$, T:n subadditiivisuus seuraa Minkowskin epäyhtälöstä suoralla, mutta pitkähköllä laskulla. Voimme siis jälleen määritellä funktion h kuten yhtälössä (5.11) ja asettaa $\omega_1 = \omega^{1/p}h^{p/q}$ sekä $\omega_2 = \omega^{-1/p}h$. Aivan kuten tapauksessa $p = 2$, epäyhtälöstä (5.12) seuraa, että $\omega_1, \omega_2 \in A_1$. Lisäksi

$$\omega = \omega_1 \omega_2^{1-p} = \omega^{1/p}h^{p/q}(\omega^{-1/p}h)^{1-p},$$

sillä $p/q = p - 1$.

Kun $p \leq 2$ ja $\omega \in A_p$, pätee $q \leq 2$ ja $\omega^{-q/p} \in A_q$. Jaetaan tällöin $\omega^{-q/p}$ A_1-tekijöihin $\omega^{-q/p} = v_1 v_2^{1-q}$, mistä seuraa, että

$$\omega = (v_1 v_2^{1-q})^{-p/q} = v_1^{1-p} v_2,$$

sillä $-p/q + p = 1$. □

Yhdessä proposition 5.3 kanssa edellinen lause osoittaa, että itse asiassa $\omega \in A_p$ jos ja vain jos $\omega = \omega_1 \omega_2^{1-p}$, missä $\omega_1, \omega_2 \in A_1$. A_1-painot voidaan edelleen hajottaa osiin ja esittää maksimaalifunktion ja oleellisesti rajoitetun funktion tulona.

Lause 5.10. *Olkoon $\omega \in A_1$. Tällöin on olemassa $g \in L^1_{loc}(X)$ siten, että $Mg < +\infty$ μ-melkein kaikkialla, vakio $\delta < 1$ ja $K \in L^\infty(X)$, jolle pätee $K^{-1} \in L^\infty(X)$ siten, että $\omega(x) = K(x)Mg(x)^\delta$.*

Todistus. Olkoon $\omega \in A_1$ mielivaltainen. Tällöin

$$\fint_B \omega d\mu \leq C_1 \omega(x)$$

μ-melkein kaikilla $x \in B$, kaikilla $B \subset X$. Toisaalta käänteinen Hölderin epäyhtälö pätee A_1-painoille, joten on olemassa ainoastaan p:stä ja C_1:stä riippuvat vakiot C_2 ja $\epsilon > 0$ siten, että kaikilla $B \subset X$

$$\left(\fint_B \omega^{1+\epsilon} d\mu\right)^{1/(1+\epsilon)} \leq C_2 \fint_B \omega d\mu.$$

Yhdistämällä nämä epäyhtälöt saamme

$$\begin{aligned} \left[(M\omega^{1+\epsilon})(x)\right]^{1/(1+\epsilon)} &= \left(\sup_{B \ni x} \fint_B \omega^{1+\epsilon} d\mu\right)^{1/(1+\epsilon)} \\ &\leq \sup_{B \ni x} C_2 \fint_B \omega d\mu \\ &\leq C\omega(x) \end{aligned}$$

μ-melkein kaikilla $x \in B$ ja kaikilla $B \subset X$. Asetetaan $g = \omega^{1+\epsilon}$ ja $\delta = 1/(1+\epsilon)$. Selvästi $g \in L^1_{loc}(X)$ ja

$$Mg(x)^\delta \leq C\omega(x)$$

μ-melkein kaikkialla. Koska $\omega \in L^1_{loc}(X)$, se on äärellinen μ-melkein kaikkialla, joten sama pätee myös maksimaalifunktiolle Mg. Toisaalta Lebesguen lauseen perusteella

$$\omega(x) = g(x)^\delta \leq Mg(x)^\delta \leq C\omega(x), \tag{5.13}$$

joten jos asetetaan $K(x) = \omega(x)Mg(x)^{-\delta}$, niin pätee selvästi $K \in L^\infty(X)$. Nyt $K^{-1}(x) = \omega(x)^{-1}Mg(x)^\delta$, ja epäyhtälöketjun (5.13) perusteella

$$|K^{-1}(x)| \leq |\omega(x)^{-1}||Mg(x)^\delta| \leq C.$$

Toisin sanoen $K^{-1} \in L^{\infty}(X)$. Huomautuksessa 5.2 totesimme, että $\omega > 0$ μ-melkein kaikkialla, joten K ja K^{-1} ovat hyvin määritellyt.

$\square$

Luku 6

Käänteinen Hölderin epäyhtälö

Muckenhouptin painofunktiot ja Coifman-Rochbergin lause ovat keskeisessä osassa BMO-funktioiden karakterisoinnissa. Coifman-Rochbergin lauseen käänteisen version päteminen metrisessä avaruudessa riippuu oleellisesti käänteisen Hölderin epäyhtälön voimassaolosta. Käänteinen Hölderin epäyhtälö on kuitenkin jo itsessään hyvin kiinnostava ilmiö, joten tarkastellaan sitä hetki sovelluksesta irrallaan. Coifman-Rochbergin lauseeseen palaamme luvussa 7.

Käsissämme on jälleen tulos, jonka todistus perinteisesti nojaa Calderón-Zygmundin jakoon ja dyadisiin kuutioihin. Kirjallisuudessa esiintyy useita eri versioita Calderón-Zygmundin jaosta metrisessä avaruudessa. Ne ovat luonnollisesti kuutiojakoa heikompia, mutta tyypillisesti myös jollain tavalla puutteellisia esimerkiksi integraalikeskiarvon alarajan suhteen (katso esimerkiksi [13, lemma 6.2.8]). Esittelemämme Calderón-Zygmundin jako korjaa tämän puutteen. Tarkoituksemme on todistaa käänteinen Hölderin epäyhtälö Coifmanin ja Feffermanin hengessä [2], ja Calderón-Zygmundin jakomme palloille osoittautuu toimivaksi. Avaruus (X, d, μ) on jälleen tuplaava.

Lause 6.1 (Käänteinen Hölderin epäyhtälö). *Olkoon $\omega \in A_p$, $1 \leq p < +\infty$. Tällöin on olemassa C ja $\epsilon > 0$ siten, että kaikilla $B \subset X$ pätee*

$$\left(\fint_B \omega^{1+\epsilon} d\mu \right)^{1/(1+\epsilon)} \leq C \fint_B \omega d\mu. \tag{6.1}$$

Vakiot riippuvat ainoastaan p:stä, mittojen μ ja ω tuplaavuusvakiosta sekä painon ω A_p-vakiosta.

Yhtälöä (6.1) kutsutaan käänteiseksi Hölderin epäyhtälöksi, koska perinteisestä Hölderin epäyhtälöstä

$$\int_B fg d\mu \leq \left(\int_B f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_B g^q d\mu \right)^{1/q},$$

joka pätee kaikilla μ-mitallisilla ei-negatiivisilla f, g seuraa

$$\int_B f d\mu \leq C \left(\int_B f^p d\mu \right)^{1/p}$$

asettamalla $g \equiv 1$.

6.1 Calderón-Zygmundin hajotelma

Lause 6.2 (Calderón-Zygmundin hajotelma). *Olkoot $f \in L^1_{loc}(X)$ ei-negatiivinen, $B \subset X$ ja $\lambda > \inf_B Mf$. Tällöin on olemassa $x_i \in B$ ja pareittain pistevieraat pallot $B_i = B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ siten, että kaikilla $i \in \mathbb{N}$ pätee*

$$\lambda < \fint_{B_i} f\,d\mu \leq C\lambda, \tag{6.2}$$

missä vakio C riippuu ainoastaan tuplavuusvakiosta,

$$|f(x)| \leq \lambda \quad \mu\text{-m.k. } x \in X \setminus \cup_{i=1}^{\infty} 5B_i \tag{6.3}$$

ja

$$\{x \in B \ : \ Mf(x) > \lambda\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i. \tag{6.4}$$

Todistus. Tarkastellaan mielivaltaista palloa $B(x_0, r_0) \subset X$ ja keskitettyä Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktiota

$$M_c f(x) = \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} f\,d\mu.$$

Olkoon $E_\lambda = \{x \in X \ : \ M_c f(x) > \lambda\}$. Kaikilla $x \in E_\lambda \cap B(x_0, r_0)$, on olemassa $r_x > 0$ siten, että

$$\fint_{B(x,r_x)} f\,d\mu > \lambda.$$

Lisäksi, koska $\lambda > \inf_B M_c f$, on olemassa $y \in B(x_0, r_0)$ siten, että $M_c f(y) \leq \lambda$. Olkoon $x \in B(x_0, r_0)$ mielivaltainen ja $r \geq 2r_0$. Jos $z \in B(x, r)$, niin

$$d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) \leq r + 2r_0 \leq 2r,$$

eli $B(x, r) \subset B(y, 2r)$. Selvästi myös $B(y, 2r) \subset B(x, 4r)$. Tällöin

$$\begin{aligned} \fint_{B(x,r)} f\,d\mu &\leq \frac{\mu(B(y,2r))}{\mu(B(x,r))} \fint_{B(y,2r)} f\,d\mu \\ &\leq C_1 \fint_{B(y,2r)} f\,d\mu \\ &\leq C_1 Mf(y) \\ &\leq C_1 \lambda. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Tarkastellaan sitten palloa $B(x, 2r_x)$. Mikäli

$$\fint_{B(x,2r_x)} f\,d\mu \leq C_1 \lambda,$$

lopetetaan, muutoin siirrytään tarkastelemaan palloa $B(x, 4r_x)$. Näin kaikille $x \in E_\lambda \cap B(x_0, r_0)$ löydetään säde $\tilde{r}_x \geq r_x$ siten, että

$$\lambda < \fint_{B(x,r_x)} f\,d\mu \leq C_2 \fint_{B(x,\tilde{r}_x)} f\,d\mu \leq C_\mu C_2 \fint_{B(x,2\tilde{r}_x)} f\,d\mu \leq C\lambda. \tag{6.6}$$

Epäyhtälö (6.5) takaa, että $\tilde{r}_x \leq 2r_0$. Vitalin peitelauseen nojalla on olemassa epäyhtälön (6.6) toteuttavat pareittain pistevieraat pallot $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ siten, että

$$E_\lambda \cap B(x_0, r_0) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} 5B_i$$

ja näin ollen $Mf(x) \leq \lambda$ kaikilla $x \in X \setminus \cup_{i=1}^{\infty} 5B_i$. Lebesguen lauseesta seuraa, että $f(x) \leq \lambda$ μ-melkein kaikkialla samassa joukossa.

□

Calderón-Zygmundin jako metrisessä avaruudessa on heikompi kuin avaruudessa $\mathbb{R}^n$ siltä osin, että peittävät pallot eivät ole pistevieraita, kuten dyadiset kuutiot avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Yhtälöissä (6.3) ja (6.4) joudumme käyttämään pallojen B_i sijaan suurennettuja palloja $5B_i$. Konstruoitavat pallot B_i eivät enää välttämättä sisälly alkuperäiseen palloon B, mutta ainakin palloon $4B$.

6.2 Käänteisen Hölderin epäyhtälön todistus

Calderón-Zygmundin hajotelman lisäksi käänteisen Hölderin epäyhtälön todistamiseksi tarvitsemme kahta lemmaa. Ensimmäinen on suora yleistys reaaliavaruuden tapauksesta, mutta toisen todistuksessa joudumme näkemään enemmän vaivaa.

Lemma 6.3. *Olkoon $\omega \in A_p$, $1 \leq p < +\infty$. Tällöin on olemassa vakiot $\alpha, \beta > 0$ siten, että*

$$\mu(\{x \in B \,:\, \omega(x) > \beta\omega_B\}) > \alpha\mu(B)$$

kaikilla B.

Todistus. Olkoon $\beta > 0$ mielivaltainen ja $E = \{x \in B \,:\, \omega(x) \leq \beta\omega_B\}$. Selvästi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}\left(\frac{\mu(E)}{\mu(B)}\right)^{p-1} &= \omega_B\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_E (\omega_B\beta)^{-1/(p-1)}d\mu\right)^{p-1} \\
&\leq \omega_B\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_E \omega(x)^{1-q}d\mu\right)^{p-1} \\
&\leq \omega_B\left(⨍_B \omega(x)^{1-q}d\mu\right)^{p-1} \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

sillä $\omega \in A_p$. Nyt siis pätee

$$\mu(E) \leq (C\beta)^{1/(p-1)}\mu(B),$$

joten

$$\begin{aligned}
\mu(\{x \in B \,:\, \omega(x) > \beta\omega_B\}) &= \mu(B) - \mu(E) \\
&\geq \alpha\mu(B),
\end{aligned}$$

missä $\alpha = 1 - (C\beta)^{1/(p-1)}$ ja β on valittu niin pieneksi, että $(C\beta)^{1/(p-1)} < 1$.

□

Lemma 6.4. *Olkoon $\omega \in A_p$, $1 \leq p < +\infty$. Tällöin mielivaltaisella $\beta > 0$ pätee*

$$\int_{\{x\in B\,:\,\omega(x)>\lambda\}} \omega d\mu \leq C\lambda\mu(\{x \in B \;:\; \omega(x) > \beta\lambda\}) \tag{6.7}$$

kaikilla B ja $\lambda > \omega_B$. Vakio C riippuu ainoastaan ω:n määrittelemän mitan tuplaavuusvakiosta.

Todistus. Olkoon $B \subset X$ mielivaltainen ja $\lambda > \omega_B$. Calderón-Zygmundin hajotelma ω:lle vakiolla λ antaa pistevieraat pallot $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, jotka toteuttavat epäyhtälöt (6.2)-(6.4). Tällöin

$$\begin{aligned}
\int_{\{x\in B\,:\,\omega(x)>\lambda\}} \omega d\mu &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\int_{5B_i} \omega d\mu \\
&\leq C\sum_{i=1}^{\infty}\int_{B_i} \omega d\mu \\
&\leq C\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i),
\end{aligned}$$

sillä ω:n määrittelemä mitta on tuplaava ja Calderón-Zygmundin pallot toteuttavat epäyhtälön (6.2). Lisäksi lemman 6.3 nojalla

$$\begin{aligned}
\mu(B_i) &< \frac{1}{\alpha}\mu(\{x \in B_i \;:\; \omega(x) > \beta\omega_{B_i}\}) \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\mu(\{x \in B_i \;:\; \omega(x) > \beta\lambda\}).
\end{aligned}$$

Jälkimmäinen epäyhtälö toteutuu, sillä epäyhtälön (6.2) mukaan $\omega_{B_i} > \lambda$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Lisäksi Calderón-Zygmundin palloille pätee, että $\cup_i B_i \subset 4B$, joten

$$\int_{\{x\in B\,:\,\omega(x)>\lambda\}} \omega d\mu \leq C\lambda\mu(\{x \in 4B \;:\; \omega(x) > \beta\lambda\}). \tag{6.8}$$

Alamme olla aika lähellä haluamaamme lopputulosta. Pallosta $4B$ tulisi vielä jotenkin päästä takaisin alkuperäiseen palloon B. Nyt on tärkeää huomata, että epäyhtälö (6.8) pätee mille tahansa pallolle B. Tehdään pallolle B Whitneyn hajotelma proposition 2.11 mukaan. Nyt siis

$$\begin{aligned}
\int_{\{x\in B\,:\,\omega(x)>\lambda\}} \omega d\mu &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\int_{\{x\in 5B_i\,:\,\omega(x)>\lambda\}} \omega d\mu \\
&\leq C\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\mu(\{x \in 20B_i \;:\; w(x) > \beta\lambda\}),
\end{aligned}$$

sillä erityisesti yhtälö (6.8) pätee Whitneyn hajotelman palloille. Näille palloille pätee lisäksi $\sum_i \chi_{20B_i}(x) \leq K$ kaikilla $x \in B$, joten

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}\mu(20B_i) &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_B \chi_{20B_i} d\mu \\
&= \int_B \sum_{i=1}^{\infty}\chi_{20B_i} d\mu \\
&\leq K\mu(B).
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\int_{\{x\in B\,:\,\omega(x)>\lambda\}} \omega d\mu \leq C\lambda\mu(\{x\in B\,:\,w(x)>\beta\lambda\}).$$

□

Edellinen lemma on käänteisen Hölderin epäyhtälön syvällisin edellytys. Siinä käytetään hyväksi ω:n tuplaavuutta, mitä $\mathbb{R}^n$:ssä ei tarvita. Sillä ja Whitneyn hajotelmalla paikataan Calderón-Zygmundin jaon puutteet metrisessä avaruudessa.

Käänteisen Hölderin epäyhtälön todistus. Olkoon $\omega \in A_p$, $1 \leq p < +\infty$ ja $B \subset X$ mielivaltainen pallo. Valitaan $\lambda > \omega_B$, jolloin lemma 6.4 pätee. Olkoon $\epsilon > 0$ ensin mielivaltainen. Kerrotaan epäyhtälö (6.7) puolittain $\lambda^{\epsilon-1}$:lla ja integroidaan λ:n suhteen. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_{\omega_B}^{\infty} \lambda^{\epsilon-1}\left(\int_{\{x\in B\,:\,\omega(x)>\lambda\}} \omega(x)d\mu(x)\right)d\lambda \\ \leq C\int_0^{\infty} \lambda^{\epsilon}\mu(\{x\in B\,:\,\omega(x)>\beta\lambda\})d\lambda. \qquad (6.9)\end{aligned}$$

Tarkastellaan ensin epäyhtälön oikeaa puolta. Lemman 2.12 avulla

$$\int_0^{\infty} \lambda^{\epsilon}\mu(\{x\in B\,:\,\omega(x)>\beta\lambda\})d\lambda = \frac{C}{\beta^{1+\epsilon}(1+\epsilon)}\int_B \omega^{1+\epsilon}d\mu.$$

Vasempaan puoleen sovelletaan Fubinin lausetta.

$$\begin{aligned}\int_{\omega_B}^{\infty} \lambda^{\epsilon-1}\left(\int_{\{x\in B\,:\,\omega(x)>\lambda\}} \omega(x)d\mu(x)\right)d\lambda &= \int_B\left(\int_{\omega_B}^{\omega}\lambda^{\epsilon-1}d\lambda\right)\omega(x)d\mu(x)\\ &= \int_B\left(\frac{\omega(x)^{\epsilon}}{\epsilon}-\frac{\omega_B^{\epsilon}}{\epsilon}\right)\omega(x)d\mu(x)\\ &= \frac{1}{\epsilon}\int_B\omega^{1+\epsilon}d\mu-\frac{\omega_B^{\epsilon}}{\epsilon}\int_B\omega d\mu\\ &= \frac{1}{\epsilon}\int_B\omega^{1+\epsilon}d\mu-\frac{\omega_B^{1+\epsilon}}{\epsilon}\mu(B).\end{aligned}$$

Nyt epäyhtälö (6.9) voidaan kirjoitaa muodossa

$$\left(\frac{1}{\epsilon}-\frac{C}{\beta^{1+\epsilon}(1+\epsilon)}\right)⨍_B \omega^{1+\epsilon}d\mu \leq \frac{1}{\epsilon}\left(⨍_B \omega d\mu\right)^{1+\epsilon}.$$

Kun $\epsilon > 0$ valitaan tarpeeksi pieneksi, tästä seuraa, että

$$\left(⨍_B \omega^{1+\epsilon}d\mu\right)^{1/(1+\epsilon)} \leq C⨍_B \omega d\mu.$$

□

Luku 7

Coifman-Rochbergin lause

Viimeisessä luvussa keräämme yhteen kahden edellisen luvun palaset ja todistamme työn toisen BMO-karakterisaatiolauseen. Karkeasti sanottuna BMO-funktiot ovat A_p-painojen logaritmeja. Siispä Coifman-Rochbergin lauseen sisältö on, että BMO(X) muodostuu maksimaalifunktioiden logaritmien ja oleellisti rajoitettujen funktioiden summista.

Olkoon (X, d, μ) tuplaava ja $\nu : X \to [0, \infty]$ Borelin ulkomitta. Kuten luvussa 2, määritellään maksimaalifunktio $M\nu : X \to [0, \infty]$ siten, että

$$M\nu(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B d\nu, \tag{7.1}$$

missä supremum otetaan yli kaikkien pallojen $B \subset X$, joihin x kuuluu. Jokainen μ-mitallinen funktio $f : X \to [0, \infty]$ voidaan tulkita mittana luonnollisella tavalla

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

kaikilla μ-mitallisilla $E \subset X$. Tällöin maksimaalifunktio (7.1) yhtyy Hardy-Littlewoodin maksimaalifunktioon positiivisilla funktioilla.

7.1 A_p ja BMO

Muckenhouptin painojen avulla on mahdollista konstruoida BMO-funktioita.

Lause 7.1. *Jokaisella* $\omega \in A_1$ *pätee* $\log \omega \in BMO(X)$.

Todistus. Olkoon $f(x) = \log \omega(x)$ kaikilla $x \in X$. Haluamme näyttää, että on olemassa vakio $M > 0$ siten, että

$$⨍_B |f - f_B| d\mu \leq M$$

kaikilla $B \subset X$. Oletuksen mukaan $\omega = e^f \in A_1$, eli

$$⨍_B e^{f(y)} d\mu(y) \leq C e^{f(x)}$$

μ-melkein kaikilla $x \in B$ ja kaikilla $B \subset X$. Toisin sanoen pätee

$$\fint_B e^f d\mu \, e^{-f(x)} \leq C$$

μ-melkein kaikilla $x \in B$ ja kaikilla $B \subset X$. Tästä seuraa, että

$$\fint_B e^f d\mu \ \sup_{x\in B} \operatorname{ess} e^{-f(x)} \leq C. \tag{7.2}$$

Koska

$$\sup_{x\in B} \operatorname{ess} e^{-f(x)} = e^{-\inf \operatorname{ess}_{x\in B} f(x)},$$

epäyhtälö (7.2) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\fint_B e^f d\mu \, e^{-\inf \operatorname{ess}_{x\in B} f(x)} \leq C \tag{7.3}$$

μ-melkein kaikilla $x \in B$ kaikilla $B \subset X$. Kuvaus $x \mapsto e^x$ on konveksi, joten Jensenin epäyhtälön avulla

$$e^{f_B} = e^{\fint_B f d\mu} \leq \fint_B e^f d\mu.$$

Yhdistämällä tämä epäyhtälön (7.3) kanssa saadaan

$$e^{f_B - \inf \operatorname{ess}_{x\in B} f(x)} \leq C,$$

mistä edelleen seuraa, että

$$f_B - \inf_{x\in B} \operatorname{ess} f(x) \leq C. \tag{7.4}$$

Yhtälön (7.4) toteuttavia funktioita voidaan kutsua *BLO*- eli *Bounded Lower Oscillation* -funktioiksi. Selvästi

$$\begin{aligned} |f(y) - f_B| &\leq |f(y) - \inf_{x\in B} \operatorname{ess} f(x)| + |\inf_{x\in B} \operatorname{ess} f(x) - f_B| \\ &= (f(y) - \inf_{x\in B} \operatorname{ess} f(x)) + (f_B - \inf_{x\in B} \operatorname{ess} f(x)), \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \fint_B |f(y) - f_B| d\mu(y) &\leq \fint_B f(y) - \inf_{x\in B} \operatorname{ess} f(x) d\mu(y) + \\ &\quad + \fint_B f_B - \inf_{x\in B} \operatorname{ess} f(x) d\mu(y) \\ &= 2f_B - \inf_{x\in B} \operatorname{ess} f(x) \\ &\leq 2C. \end{aligned}$$

Väite seuraa nyt proposition 3.3 nojalla. Samalla olemme osoittaneet, että

$$\mathrm{BLO}(X) \subset \mathrm{BMO}(X).$$

$\square$

Lause 7.1 pätee kaikilla $\omega \in A_p$, kun $1 \leq p < +\infty$, mikä seuraa suoraan lauseesta 5.9. Suora todistus on sama kuin $\mathbb{R}^n$:ssä, ja löytyy lähteestä [4, luku 7, kappale 5.6]. BMO-funktiot voidaan itse asiassa karakterisoida esimerkiksi A_2 painojen logaritmeina.

Propositio 7.2. *Olkoon $f \in BMO(X)$. Tällöin riittävän pienellä $\epsilon > 0$ pätee $e^{\epsilon f} \in A_2$.*

Todistus. Olkoon $f \in \mathrm{BMO}(X)$ mielivaltainen, ja $0 < \epsilon < c_2/\|f\|_{BMO}$, missä c_2 on John-Nirenbergin lemman vakio. Tällöin

$$\begin{aligned}
(\fint_B e^{\epsilon f} d\mu)(\fint_B e^{-\epsilon f} d\mu) &= e^{\epsilon f_B} e^{-\epsilon f_B} (\fint_B e^{\epsilon f} d\mu)(\fint_B e^{-\epsilon f} d\mu) \\
&= (\fint_B e^{\epsilon (f - f_B)} d\mu)(\fint_B e^{-\epsilon (f - f_B)} d\mu) \\
&\leq (\fint_B e^{\epsilon |f - f_B|} d\mu)^2 \\
&\leq C^2
\end{aligned}$$

John-Nirenbergin lemman seurauksen 4.3 perusteella. Toisin sanoen $e^{\epsilon f} \in A_2$.

□

Lause 7.1 ja propositio 7.2 sanovat oleellisesti, että

$$\mathrm{BMO}(X) = \{\epsilon \log \omega \ : \ \omega \in A_2, \, \epsilon > 0\}.$$

Propositiossa 7.2 A_2 on mahdollista korvata A_p:llä, kun $1 < p < +\infty$. Arvolla $p = 1$ pätee, että $f \in \mathrm{BLO}$ jos ja vain jos $e^{\epsilon f} \in A_1$ jollain $\epsilon > 0$. Toinen suunta tulee osoitetuksi lauseen 7.1 todistuksessa, mutta yksinkertainen todistus löytyy myös lähteestä [1].

7.2 Coifman-Rochbergin karakterisaatio

John-Nirenbergin lemma karakterisoi BMO-funktiot, mutta ei anna tapaa konstruoida niitä. Tässä mielessä Coifman-Rochbergin lause on täydellisempi karakterisaatiolause.

Lause 7.3 (Coifman-Rochbergin lause). *Olkoon ν positiivinen Borelin mitta X:llä siten, että $M\nu(x) < +\infty$ μ-melkein kaikilla $x \in X$. Olkoon $0 < \gamma < 1$. Tällöin funktio $\omega(x) = (M\nu(x))^\gamma$ on A_1-paino vakiolla, joka riippuu ainoastaan γ:sta ja tuplaavuusvakiosta C_μ.*

Todistus. Olkoon $B \subset X$ mielivaltainen. Haluamme osoittaa, että

$$\fint_B \omega d\mu \leq C\omega(x) \tag{7.5}$$

μ-melkein kaikilla $x \in B$, missä vakio C ei riipu valitusta pallosta, vaan ainoastaan tuplaavuusvakiosta C_μ. Kirjoitetaan ν kahden mitan summana

$$\nu = \nu_1 + \nu_2,$$

missä

$$\nu_1 = \nu \chi_{3B} \quad \text{ja} \quad \nu_2 = (1 - \chi_{3B})\nu.$$

Ideanamme on toisaalta työskennellä pallossa B ja sen lähiympäristössä, ja toisaalta kaukana pallosta. Tällöin

$$\begin{aligned}
M\nu(x) &= \sup_{B \ni x} \frac{\nu_1(B) + \nu_2(B)}{\mu(B)} \\
&\leq \sup_{B \ni x} \frac{\nu_1(B)}{\mu(B)} + \sup_{B \ni x} \frac{\nu_2(B)}{\mu(B)} \\
&= M\nu_1(x) + M\nu_2(x).
\end{aligned}$$

Lisäksi $0 < \gamma < 1$, joten

$$(M\nu(x))^\gamma \leq (M\nu_1(x))^\gamma + (M\nu_2(x))^\gamma,$$

ja koska selvästi vielä

$$(M\nu_i(x))^\gamma \leq (M\nu(x))^\gamma = \omega(x),$$

kun $i \in \{1,2\}$, voimme tarkastella yhtälöä (7.5) erikseen funktioille $M\nu_1$ ja $M\nu_2$.

Lemman 2.12 mukaan

$$\begin{aligned}
\fint_B (M\nu_1(x))^\gamma d\mu &= \frac{1}{\mu(B)} \int_0^\infty \gamma\lambda^{\gamma-1}\mu(\{x \in B : M\nu_1(x) > \lambda\})d\lambda \\
&= \frac{1}{\mu(B)} \Big(\int_0^\delta + \int_\delta^\infty \Big)
\end{aligned}$$

jollakin mielivaltaisella $\delta > 0$. Tarkastellaan ensimmäistä integraalia. Selvästi

$$\mu(\{x \in B : M\nu_1(x) > \lambda\}) \leq \mu(B),$$

joten

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_0^\delta \gamma\lambda^{\gamma-1}\mu(\{x \in B : M\nu_1(x) > \lambda\})d\lambda \leq \Big|_0^\delta \lambda^\gamma = \delta^\gamma.$$

Koska maksimaalioperaattori M on heikko $(1,1)$, jälkimmäistä integraalia voidaan arvioida seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(B)} \int_\delta^\infty \gamma\lambda^{\gamma-1}\mu(\{x \in B : M\nu_1(x) > \lambda\})d\lambda &\leq \frac{1}{\mu(B)} \int_\delta^\infty C\gamma\lambda^{\gamma-2}\nu_1(X)d\lambda \\
&= \frac{\nu_1(X)}{\mu(B)} \frac{C\gamma}{1-\gamma}\delta^{\gamma-1},
\end{aligned}$$

missä vakio C riippuu ainoastaan tuplaavuusvakiosta C_μ. Valitsemalla $\delta = \nu_1(X)\mu(B)^{-1}$ ja yhdistämällä epäyhtälöt saamme

$$\begin{aligned}
\fint_B (M\nu_1(y))^\gamma d\mu(y) &\leq \Big(\frac{\nu_1(X)}{\mu(B)}\Big)^\gamma \Big(1 + \frac{C\gamma}{1-\gamma}\Big) \\
&= \Big(\frac{\nu_1(3B)}{\mu(B)}\Big)^\gamma \Big(1 + \frac{C\gamma}{1-\gamma}\Big) \\
&\leq C\Big(\frac{\nu_1(3B)}{\mu(3B)}\Big)^\gamma,
\end{aligned}$$

missä $C = C(C_\mu, \gamma)$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\fint_B (M\nu_1(y))^\gamma d\mu(y) &\leq C(M\nu_1(x))^\gamma \\
&\leq C\omega(x)
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in B$.

Mitta ν_2 on ν:n rajoittuma alueeseen, joka on kaukana B:stä. Tämän vuoksi kaikilla $x, y \in B$

$$M\nu_2(y) \leq CM\nu_2(x).$$

Todistetaan ensin tämä. Olkoon B' sellainen pallo, että $x \in B'$ ja $B' \cap (X \setminus 3B) \neq \emptyset$. Tällöin $B \subset 3B'$, joten

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B')}\int_{B'} d\nu_2 &\leq \frac{C}{\mu(3B')}\int_{3B'} d\mu_2 \\ &\leq CM\nu_2(x) \\ &\leq C\omega(x)^{1/\gamma},\end{aligned}$$

sillä $x \in 3B'$. Oikea puoli ei riipu y:stä, joten

$$\sup_{B \ni y} \frac{1}{\mu(B)}\int_B d\nu_2 \leq CM\nu_2(x).$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}\fint_B (M\nu(y))^\gamma d\mu(y) &\leq \fint_B (M\nu_1(y))^\gamma\, d\mu(y) + \fint_B (M\nu_2(y))^\gamma\, d\mu(y) \\ &\leq C\omega(x)\end{aligned}$$

kaikilla $x \in B$, kaikilla $B \subset X$. □

Lauseen 7.3 todistuksessa ei eksplisiittisesti tarvita oletusta, että $M\nu < +\infty$ μ-melkein kaikkialla. Kuitenkin, jos oletus hylätään, väite on triviaali. Lisäksi, jos $\inf \mathrm{ess}_E\, M\nu < +\infty$ jossakin mitaltaan positiivisessa joukossa E, $M\nu < +\infty$ μ-melkein kaikkialla.

Seuraus 7.4. *Kaikilla positiivisilla Borelin mitoilla ν, joille pätee $M\nu(x) < +\infty$ μ-melkein kaikilla $x \in X$, $\log M\nu \in BMO(X)$.*

Yhdessä lauseen 7.1 kanssa Coifman-Rochbergin lause antaa meille tavan konstruoida BMO-funktioita L^1-integroituvien funktioiden maksimaalifunktioista. Lauseen avulla voimme myös osoittaa, että on olemassa X siten, että $\mathrm{BMO}(X) \not\subset L^\infty(X)$ ja näin täydentää proposition 3.3 todistuksen.

Esimerkki 7.5. Jos mitalliselle funktiolle $f : X \to [-\infty, +\infty]$ pätee, että

$$\lambda\mu(\{x \in X \ : \ |f(x)| > \lambda\})$$

on λ:n rajoitettu funktio välillä $(0, \infty)$, sanotaan, että f kuuluu *heikkoon* L^1-avaruuteen. Lause 2.13 sanookin oleellisesti, että Hardy-Littlewoodin maksimaalioperaattori M kuvaa $L^1(X)$:n heikkoon $L^1(X)$-avaruuteen. Erityisesti tästä seuraa, että $Mf < +\infty$ μ-melkein kaikkialla. Jos voimme nyt konstruoida funktion $f \in L^1(X) \setminus L^\infty(X)$, on selvää, että $Mf \notin L^\infty(X)$, $\log(Mf) \notin L^\infty(X)$, mutta kuitenkin Mf on heikossa L^1:ssä ja seurauksen 7.4 nojalla $\log(Mf) \in \mathrm{BMO}(X)$.

Oletetaan avaruus (X, μ) sellaiseksi, että voidaan valita $x \in X$ siten, että

$$\lim_{r \to 0} \mu(B(x, r)) = 0. \tag{7.6}$$

Valitaan jono säteitä $(r_k)_{k=1}^\infty$, siten, että $r_k \to 0$, kun $k \to \infty$. Määritellään sitten

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{kun} \quad x \in B(x, r_k) \setminus B(x, r_{k+1}) \\ 0 & \text{kun} \quad x \notin B(x, r_1) \end{cases}.$$

Funktiolle f pätee

$$\begin{aligned}
\int_X |f| d\mu &= \int_{B(x,r_1)} |f(x)| d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(B(x,r_k)).
\end{aligned}$$

Koska $\lim_{r\to 0} \mu(B(x,r)) = 0$, voimme valita jonon $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ siten, että

$$\mu(B(x,r_k)) \leq 2^{-k}.$$

Tällöin

$$\|f\|_{L^1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < +\infty$$

ja $f \in L^1(X)$. Toisaalta $f(x_0) \to +\infty$, kun $x_0 \to x$, joten $f \notin L^\infty(X)$.

On huomattava, että yhtälön (7.6) toteuttavan pisteen $x \in X$ olemassaolo ei seuraa suoraan tuplaavuudesta, vaan on aito lisäoletus. Esimerkiksi lisävaatimus, että on olemassa vakiot C ja s siten, että kaikilla $x \in X$, $r > 0$ pätee

$$\frac{1}{C} r^s \leq \mu(B(x,r)) \leq C r^s,$$

johtaa sopivaan avaruuteen ja on intuitiivisestikin järkevä. Tällaista mittaa kutsutaan Ahlfors-säännölliseksi, ja se on selvästi tuplaava.

Luvussa 4 osoitimme, että John-Nirenbergin lemma karakterisoi BMO-funktiot. Coifman-Rochbergin lauseella on sama ominaisuus $\mathbb{R}^n$:ssä, ja tietyin oletuksin myös metrisessä avaruudessa.

Lause 7.6 (Käänteinen Coifman-Rochberg). *Olkoon $f \in BMO(X)$. Tällöin on olemassa $g_1, g_2 \in L^1_{loc}(X)$ siten, että kun $i = 1, 2$, niin $Mg_i < +\infty$ μ-melkein kaikkialla ja $b \in L^\infty(X)$ siten, että*

$$f = \alpha \log Mg_1 - \beta \log Mg_2 + b.$$

joillakin $\alpha, \beta > 0$.

Todistus. Olkoon $f \in \mathrm{BMO}(X)$. Tällöin proposition 7.2 nojalla on olemassa $\epsilon > 0$ ja $\omega \in A_2$ siten, että $f = \epsilon \log \omega$. Lauseen 5.9 perusteella ω voidaan esittää A_1-painojen tulona, ja nämä painot edelleen lauseen 5.10 mukaan oleellisesti rajoitetun funktion ja maksimaalifunktion tulona. Toisin sanoen pätee

$$\begin{aligned}
f &= \epsilon \log \omega \\
&= \epsilon \log(\omega_1 \omega_2^{1-2}) \\
&= \epsilon \log \omega_1 - \epsilon \log \omega_2 \\
&= \epsilon \log(K_1 M g_1^{\delta_1}) - \epsilon \log(K_2 M g_2^{\delta_2}) \\
&= \epsilon\delta_1 \log Mg_1 - \epsilon\delta_2 \log Mg_2 + \epsilon(\log K_1 - \log K_2) \\
&= \alpha \log Mg_1 - \beta \log Mg_2 + b,
\end{aligned}$$

missä $\alpha = \epsilon\delta_1$, $\beta = \epsilon\delta_2$ ja $b = \log(K_1 K_2^{-1}) \in L^\infty(X)$. □

Metrisessä avaruudessa Coifman-Rochbergin lauseen todistuksessa ei päällisin puolin jouduta niin suurten ongelmien eteen kuin John-Nirenbergin lemmassa. John-Nirenbergin lemman vaikeus on kuitenkin osoittaa, että minkälaisen yhtälön BMO-funktio toteuttaa. Tätä suuntaa vastaa paremmin Coifman-Rochbergin lauseen käänteinen tulos, jossa kaikki metrisen avaruuden mukanaan tuoma hankaluus keskittyy käänteisen Hölderin epäyhtälön ympärille. Tämän todistuksessa metrisen avaruuden mukanaan tuomat ongemat ovat luonteeltaan hyvin samanlaisia kuin John-Nirenbergin lemmassa ja korjattavissa samoilla työkaluilla.

Kirjallisuutta

[1] R. R. Coifman and R. Rochberg. Another characterization of BMO. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, volume 79, June 1980.

[2] R.R. Coifman and C. Fefferman. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals. *Studia Mathematica*, 51:241–250, 1974.

[3] R.R. Coifman and G. Weiss. *Analyse Harmonique Non-Commutative sur Certaines Espaces Homogènes.* Springer-Verlag, 1971.

[4] J. Duoandikoetxea. *Fourier Analysis.* American Mathematical Society, 2001.

[5] L. C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* CRC Press, 1992.

[6] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia. *Weighted Norm Inequalities and Related Results.* Elsevin Science Publishers, 1985.

[7] L. Grafakos. *Classical and Modern Fourier Analysis.* Pearson Education, 2004.

[8] J. Heinonen. *Lectures on Analysis on Metric Spaces.* Springer, 2001.

[9] E. Hewitt and K. Stromberg. *Real and Abstract Analysis : a Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable.* Springer, 1965.

[10] F. John. Rotation and strain. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 14, 1961.

[11] F. John and L. Nirenberg. On functions of bounded mean oscillation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 14, 1961.

[12] Stephen Keith. A differentiable stucture for metric measure spaces. *Ad. Math.*, 183(2):271–315, 2004.

[13] S. G. Krantz. *A Panorama of Harmonic Analysis.* The Mathematical Association of America, 1999.

[14] J. Mateu, P.Mattila, A. Nicolau, and J. Orobitg. BMO for nondoubling measures. *Duke Mathematical Journal*, 102(3), 2000.

[15] J. Moser, editor. *Fritz John : Collected papers.* Boston-Basel-Stuttgart, 1985.

[16] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1987.

[17] E. Saksman. Remarks on the nonexistence of doubling measures. In *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, volume 24, pages 155–163, 1999.

[18] E. M. Stein. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, 1993.

[19] J-O. Strömberg and A. Torchinsky. *Weighted Hardy Spaces*, volume 1381 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, 1989.