▪ Proposition 3.3 (Polarisation identity for symmetric (4,0)-tensors).

```
In[1]:= eta1 = {A1, A2, A3, A4};
        eta2 = {B1, B2, B3, B4};
        eta3 = {C1, C2, C3, C4};
        eta4 = {D1, D2, D3, D4};
```

```
In[5]:= s[x_] := (-1)^x
```

```
In[6]:= arg[th1_, th2_, th3_, th4_] := s[th1] eta1 + s[th2] eta2 + s[th3] eta3 + s[th4] eta4
```

```
In[7]:= Lread[a_, b_, c_, d_] := Module[{tmp},
          tmp = Sort[{a, b, c, d}];
          ToExpression["Lnormal" <> ToString[tmp[[1]]] <>
            ToString[tmp[[2]]] <> ToString[tmp[[3]]] <> ToString[tmp[[4]]]]
        ]
```

```
In[8]:= L[x1_, x2_, x3_, x4_] := Sum[
          Lread[a, b, c, d] x1[[a]] x2[[b]] x3[[c]] x4[[d]],
          {a, 1, 4}, {b, 1, 4}, {c, 1, 4}, {d, 1, 4}
        ]
```

```
In[9]:= RHS = Sum[s[th1] s[th2] s[th3] s[th4] L[ arg[th1, th2, th3, th4],
            arg[th1, th2, th3, th4], arg[th1, th2, th3, th4], arg[th1, th2, th3, th4]],
          {th1, 0, 1}, {th2, 0, 1}, {th3, 0, 1}, {th4, 0, 1}
        ];
        RHS = Expand[1 / (4! × 2^4) RHS];
```

```
In[11]:= Expand[RHS - L[eta1, eta2, eta3, eta4]]
```

```
Out[11]= 0
```

```
In[12]:= 4! × 2^4
```

```
Out[12]= 384
```

▪ Extra

```
In[13]:= RHS
```

```
Out[13]= A1 B1 C1 D1 Lnormal1111 + A2 B1 C1 D1 Lnormal1112 +
          A1 B2 C1 D1 Lnormal1112 + A1 B1 C2 D1 Lnormal1112 +
          A1 B1 C1 D2 Lnormal1112 + A3 B1 C1 D1 Lnormal1113 + A1 B3 C1 D1 Lnormal1113 +
          A1 B1 C3 D1 Lnormal1113 + A1 B1 C1 D3 Lnormal1113 + A4 B1 C1 D1 Lnormal1114 +
          A1 B4 C1 D1 Lnormal1114 + A1 B1 C4 D1 Lnormal1114 + A1 B1 C1 D4 Lnormal1114 +
          A2 B2 C1 D1 Lnormal1122 + A2 B1 C2 D1 Lnormal1122 + A1 B2 C2 D1 Lnormal1122 +
          A2 B1 C1 D2 Lnormal1122 + A1 B2 C1 D2 Lnormal1122 + A1 B1 C2 D2 Lnormal1122 +
          A3 B2 C1 D1 Lnormal1123 + A2 B3 C1 D1 Lnormal1123 + A3 B1 C2 D1 Lnormal1123 +
          A1 B3 C2 D1 Lnormal1123 + A2 B1 C3 D1 Lnormal1123 + A1 B2 C3 D1 Lnormal1123 +
          A3 B1 C1 D2 Lnormal1123 + A1 B3 C1 D2 Lnormal1123 + A1 B1 C3 D2 Lnormal1123 +
          A2 B1 C1 D3 Lnormal1123 + A1 B2 C1 D3 Lnormal1123 + A1 B1 C2 D3 Lnormal1123 +
          A4 B2 C1 D1 Lnormal1124 + A2 B4 C1 D1 Lnormal1124 + A4 B1 C2 D1 Lnormal1124 +
          A1 B4 C2 D1 Lnormal1124 + A2 B1 C4 D1 Lnormal1124 + A1 B2 C4 D1 Lnormal1124 +
          A4 B1 C1 D2 Lnormal1124 + A1 B4 C1 D2 Lnormal1124 + A1 B1 C4 D2 Lnormal1124 +
          A2 B1 C1 D4 Lnormal1124 + A1 B2 C1 D4 Lnormal1124 + A1 B1 C2 D4 Lnormal1124 +
          A3 B3 C1 D1 Lnormal1133 + A3 B1 C3 D1 Lnormal1133 + A1 B3 C3 D1 Lnormal1133 +
          A3 B1 C1 D3 Lnormal1133 + A1 B3 C1 D3 Lnormal1133 + A1 B1 C3 D3 Lnormal1133 +
          A4 B3 C1 D1 Lnormal1134 + A3 B4 C1 D1 Lnormal1134 + A4 B1 C3 D1 Lnormal1134 +
          A1 B4 C3 D1 Lnormal1134 + A3 B1 C4 D1 Lnormal1134 + A1 B3 C4 D1 Lnormal1134 +
          A4 B1 C1 D3 Lnormal1134 + A1 B4 C1 D3 Lnormal1134 + A1 B1 C4 D3 Lnormal1134 +
          A3 B1 C1 D4 Lnormal1134 + A1 B3 C1 D4 Lnormal1134 + A1 B1 C3 D4 Lnormal1134 +
          A4 B4 C1 D1 Lnormal1144 + A4 B1 C4 D1 Lnormal1144 + A1 B4 C4 D1 Lnormal1144 +
          A4 B1 C1 D4 Lnormal1144 + A1 B4 C1 D4 Lnormal1144 + A1 B1 C4 D4 Lnormal1144 +
          A2 B2 C2 D1 Lnormal1222 + A2 B2 C1 D2 Lnormal1222 + A2 B1 C2 D2 Lnormal1222 +
          A1 B2 C2 D2 Lnormal1222 + A3 B2 C2 D1 Lnormal1223 + A2 B3 C2 D1 Lnormal1223 +
          A2 B2 C3 D1 Lnormal1223 + A3 B2 C1 D2 Lnormal1223 + A2 B3 C1 D2 Lnormal1223 +
          A3 B1 C2 D2 Lnormal1223 + A1 B3 C2 D2 Lnormal1223 + A2 B1 C3 D2 Lnormal1223 +
          A1 B2 C3 D2 Lnormal1223 + A2 B2 C1 D3 Lnormal1223 + A2 B1 C2 D3 Lnormal1223 +
          A1 B2 C2 D3 Lnormal1223 + A4 B2 C2 D1 Lnormal1224 + A2 B4 C2 D1 Lnormal1224 +
          A2 B2 C4 D1 Lnormal1224 + A4 B2 C1 D2 Lnormal1224 + A2 B4 C1 D2 Lnormal1224 +
          A4 B1 C2 D2 Lnormal1224 + A1 B4 C2 D2 Lnormal1224 + A2 B1 C4 D2 Lnormal1224 +
          A1 B2 C4 D2 Lnormal1224 + A2 B2 C1 D4 Lnormal1224 + A2 B1 C2 D4 Lnormal1224 +
          A1 B2 C2 D4 Lnormal1224 + A3 B3 C2 D1 Lnormal1233 + A3 B2 C3 D1 Lnormal1233 +
```

```
A2 B3 C3 D1 Lnormal1233 + A3 B3 C1 D2 Lnormal1233 + A3 B1 C3 D2 Lnormal1233 +
A1 B3 C3 D2 Lnormal1233 + A3 B2 C1 D3 Lnormal1233 + A2 B3 C1 D3 Lnormal1233 +
A3 B1 C2 D3 Lnormal1233 + A1 B3 C2 D3 Lnormal1233 + A2 B1 C3 D3 Lnormal1233 +
A1 B2 C3 D3 Lnormal1233 + A4 B3 C2 D1 Lnormal1234 + A3 B4 C2 D1 Lnormal1234 +
A4 B2 C3 D1 Lnormal1234 + A2 B4 C3 D1 Lnormal1234 + A3 B2 C4 D1 Lnormal1234 +
A2 B3 C4 D1 Lnormal1234 + A4 B3 C1 D2 Lnormal1234 + A3 B4 C1 D2 Lnormal1234 +
A4 B1 C3 D2 Lnormal1234 + A1 B4 C3 D2 Lnormal1234 + A3 B1 C4 D2 Lnormal1234 +
A1 B3 C4 D2 Lnormal1234 + A4 B2 C1 D3 Lnormal1234 + A2 B4 C1 D3 Lnormal1234 +
A4 B1 C2 D3 Lnormal1234 + A1 B4 C2 D3 Lnormal1234 + A2 B1 C4 D3 Lnormal1234 +
A1 B2 C4 D3 Lnormal1234 + A3 B2 C1 D4 Lnormal1234 + A2 B3 C1 D4 Lnormal1234 +
A3 B1 C2 D4 Lnormal1234 + A1 B3 C2 D4 Lnormal1234 + A2 B1 C3 D4 Lnormal1234 +
A1 B2 C3 D4 Lnormal1234 + A4 B4 C2 D1 Lnormal1244 + A4 B2 C4 D1 Lnormal1244 +
A2 B4 C4 D1 Lnormal1244 + A4 B4 C1 D2 Lnormal1244 + A4 B1 C4 D2 Lnormal1244 +
A1 B4 C4 D2 Lnormal1244 + A4 B2 C1 D4 Lnormal1244 + A2 B4 C1 D4 Lnormal1244 +
A4 B1 C2 D4 Lnormal1244 + A1 B4 C2 D4 Lnormal1244 + A2 B1 C4 D4 Lnormal1244 +
A1 B2 C4 D4 Lnormal1244 + A3 B3 C3 D1 Lnormal1333 + A3 B3 C1 D3 Lnormal1333 +
A3 B1 C3 D3 Lnormal1333 + A1 B3 C3 D3 Lnormal1333 + A4 B3 C3 D1 Lnormal1334 +
A3 B4 C3 D1 Lnormal1334 + A3 B3 C4 D1 Lnormal1334 + A4 B3 C1 D3 Lnormal1334 +
A3 B4 C1 D3 Lnormal1334 + A4 B1 C3 D3 Lnormal1334 + A1 B4 C3 D3 Lnormal1334 +
A3 B1 C4 D3 Lnormal1334 + A1 B3 C4 D3 Lnormal1334 + A3 B3 C1 D4 Lnormal1334 +
A3 B1 C3 D4 Lnormal1334 + A1 B3 C3 D4 Lnormal1334 + A4 B4 C3 D1 Lnormal1344 +
A4 B3 C4 D1 Lnormal1344 + A3 B4 C4 D1 Lnormal1344 + A4 B4 C1 D3 Lnormal1344 +
A4 B1 C4 D3 Lnormal1344 + A1 B4 C4 D3 Lnormal1344 + A4 B3 C1 D4 Lnormal1344 +
A3 B4 C1 D4 Lnormal1344 + A4 B1 C3 D4 Lnormal1344 + A1 B4 C3 D4 Lnormal1344 +
A3 B1 C4 D4 Lnormal1344 + A1 B3 C4 D4 Lnormal1344 + A4 B4 C4 D1 Lnormal1444 +
A4 B4 C1 D4 Lnormal1444 + A4 B1 C4 D4 Lnormal1444 + A1 B4 C4 D4 Lnormal1444 +
A2 B2 C2 D2 Lnormal2222 + A3 B2 C2 D2 Lnormal2223 + A2 B3 C2 D2 Lnormal2223 +
A2 B2 C3 D2 Lnormal2223 + A2 B2 C2 D3 Lnormal2223 + A4 B2 C2 D2 Lnormal2224 +
A2 B4 C2 D2 Lnormal2224 + A2 B2 C4 D2 Lnormal2224 + A2 B2 C2 D4 Lnormal2224 +
A3 B3 C2 D2 Lnormal2233 + A3 B2 C3 D2 Lnormal2233 + A2 B3 C3 D2 Lnormal2233 +
A3 B2 C2 D3 Lnormal2233 + A2 B3 C2 D3 Lnormal2233 + A2 B2 C3 D3 Lnormal2233 +
A4 B3 C2 D2 Lnormal2234 + A3 B4 C2 D2 Lnormal2234 + A4 B2 C3 D2 Lnormal2234 +
A2 B4 C3 D2 Lnormal2234 + A3 B2 C4 D2 Lnormal2234 + A2 B3 C4 D2 Lnormal2234 +
A4 B2 C2 D3 Lnormal2234 + A2 B4 C2 D3 Lnormal2234 + A2 B2 C4 D3 Lnormal2234 +
A3 B2 C2 D4 Lnormal2234 + A2 B3 C2 D4 Lnormal2234 + A2 B2 C3 D4 Lnormal2234 +
A4 B4 C2 D2 Lnormal2244 + A4 B2 C4 D2 Lnormal2244 + A2 B4 C4 D2 Lnormal2244 +
A4 B2 C2 D4 Lnormal2244 + A2 B4 C2 D4 Lnormal2244 + A2 B2 C4 D4 Lnormal2244 +
A3 B3 C3 D2 Lnormal2333 + A3 B3 C2 D3 Lnormal2333 + A3 B2 C3 D3 Lnormal2333 +
A2 B3 C3 D3 Lnormal2333 + A4 B3 C3 D2 Lnormal2334 + A3 B4 C3 D2 Lnormal2334 +
A3 B3 C4 D2 Lnormal2334 + A4 B3 C2 D3 Lnormal2334 + A3 B4 C2 D3 Lnormal2334 +
A4 B2 C3 D3 Lnormal2334 + A2 B4 C3 D3 Lnormal2334 + A3 B2 C4 D3 Lnormal2334 +
A2 B3 C4 D3 Lnormal2334 + A3 B3 C2 D4 Lnormal2334 + A3 B2 C3 D4 Lnormal2334 +
A2 B3 C3 D4 Lnormal2334 + A4 B4 C3 D2 Lnormal2344 + A4 B3 C4 D2 Lnormal2344 +
A3 B4 C4 D2 Lnormal2344 + A4 B4 C2 D3 Lnormal2344 + A4 B2 C4 D3 Lnormal2344 +
A2 B4 C4 D3 Lnormal2344 + A4 B3 C2 D4 Lnormal2344 + A3 B4 C2 D4 Lnormal2344 +
A4 B2 C3 D4 Lnormal2344 + A2 B4 C3 D4 Lnormal2344 + A3 B2 C4 D4 Lnormal2344 +
A2 B3 C4 D4 Lnormal2344 + A4 B4 C4 D2 Lnormal2444 + A4 B4 C2 D4 Lnormal2444 +
A4 B2 C4 D4 Lnormal2444 + A2 B4 C4 D4 Lnormal2444 + A3 B3 C3 D3 Lnormal3333 +
A4 B3 C3 D3 Lnormal3334 + A3 B4 C3 D3 Lnormal3334 + A3 B3 C4 D3 Lnormal3334 +
A3 B3 C3 D4 Lnormal3334 + A4 B4 C3 D3 Lnormal3344 + A4 B3 C4 D3 Lnormal3344 +
A3 B4 C4 D3 Lnormal3344 + A4 B3 C3 D4 Lnormal3344 + A3 B4 C3 D4 Lnormal3344 +
A3 B3 C4 D4 Lnormal3344 + A4 B4 C4 D3 Lnormal3444 + A4 B4 C3 D4 Lnormal3444 +
A4 B3 C4 D4 Lnormal3444 + A3 B4 C4 D4 Lnormal3444 + A4 B4 C4 D4 Lnormal4444
```